This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

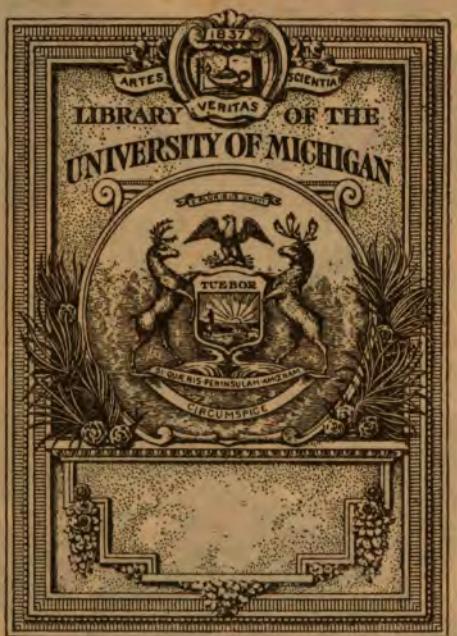
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

A 546397


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
35
.M448

PRINCIPES D'ASTRONOMIE SPHÉRIQUE;

OU

TRAITÉ COMPLET DE TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE:

Dans lequel on a réuni les Solutions numériques, géométriques & analytiques de tous les Problêmes qui ont rapport à la réſolution des Triangles ſphériques quelconques;

Avec une Théorie des différences des mêmes Triangles.

Par M. MAUDUIT, *Profeſſeur de Mathématiques.*

1731 - 1815

A PARIS,

Chez H. L. GUERIN & L. F. DELATOUR, rue S. Jacques, à S. Thomas d'Aquin.

M. DCC. LXV.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

PRÉFACE.

LA PLUPART des Traités de Trigonométrie ſphérique qui ont paru juſqu'ici, n'ont eu pour objet que d'enſeigner à réſoudre les triangles ſphériques par des proportions. Je n'en connois point qui ait réuni les différentes ſolutions dont les problêmes de cette partie des Mathématiques ſont ſuſceptibles.

Pour peu qu'on y faſſe attention, on en trouvera de trois eſpeces. Les unes ſe réduiſent aux analogies, & ſont particuliérement aſſujetties aux Logarithmes qui en rendent la pratique de la plus grande ſimplicité : ces ſolutions ſe trouvent dans tous les Traités ordinaires de Trigonométrie ſphérique. Celles de la ſeconde eſpece ne ſont autre choſe que des conſtructions géométriques, par leſquelles, avec la regle & le compas, on peut aiſément trouver toutes les parties d'un triangle à réſoudre. On les a nommées *graphiques*, parce qu'on y emploie différentes projections ou développements du triangle. Quoique leur préciſion ſoit de beaucoup au-deſſous de celle que donne le calcul, elles peuvent néanmoins être d'uſage dans un grand nombre de circonſtances ; & d'ailleurs elles ne ſont pas moins rigoureuſes aux yeux du Géometre, dont les raiſonnements ſont indépendants de la perfection des figures qu'il conſidere. Ces ſolutions ſont ſouvent

5929

employées par les Aſtronomes dans les éclipſes, ou dans les paſſages des planetes inférieures ſur le diſque du Soleil. Les Géographes en ſuppoſent toujours les connoiſſances dans leurs repréſentations des différentes portions du globe ſur une ſurface plane. La Gnomonique n'eſt elle-même qu'une application preſque continuelle de ces projections. Mais le but que je me ſuis particuliérement propoſé dans le détail que je donne ici de ces conſtructions, a été de faire, en quelque façon, découvrir la Trigonométrie tant ſphérique que rectiligne, par l'application de l'analyſe algébrique à ces ſolutions graphiques; ce qui conſtitue la troiſieme eſpece de ſolutions qu'on pouvoit deſirer ſur les problêmes de cette nature. La généralité des formules & la facilité de les découvrir, donne à cette partie l'avantage de réunir ſous un même point de vue toutes les analogies qu'on peut deſirer ſur chaque cas particulier; & la comparaiſon des ſolutions qu'elle nous donne avec celles des Anciens, ne la rend que plus curieuſe & plus intéreſſante.

Telles ſont les différentes ſolutions que je m'étois propoſé de réunir dans ce petit Traité. J'ai cru devoir y joindre encore une autre partie relative à ce travail, & qui peut être fort utile à ceux qui ſe deſtinent à étudier les différents Traités de Mathématiques pures ou d'Aſtronomie phyſique. L'avantage de trouver des ſolutions toutes approchées dans les tables des Sinus & des Logarithmes, lorſqu'on ne peut en

eſpérer aucune d'exacte & rigoureuſe, a engagé les Géometres à réduire preſque tous leurs problêmes à ces ſortes de Tables. Il s'eſt donc introduit depuis l'analyſe de DESCARTES, & les ſublimes découvertes des Géometres qui lui ont ſuccedé, un nouveau genre de calcul; par *ſinus*, *coſinus*, *tangentes*, *cotangentes*, *logarithmes*, *&c*, dont on ſuppoſe les principes connus de ceux qui liſent les ouvrages de nos Géometres. J'ai tâché d'en réunir les notions élémentaires dans le premier Chapitre de cet Ouvrage, & de leur donner le plus d'étendue poſſible, en multipliant conſidérablement toutes les formules, & les ſuites infinies qui renferment les principales propriétés.

Comme on a ſouvent employé les imaginaires dans les ſuites relatives aux diverſes fonctions des ſinus & coſinus d'arcs multiples, j'ai profité de cette occaſion pour inſérer une notion préciſe de ces expreſſions, qui fixe l'eſpece d'abſurdité qui y donne lieu. Pour traiter encore avec plus d'évidence cette Théorie des imaginaires, j'ai cherché à la démontrer par l'analyſe, en tâchant de découvrir les facteurs du binome $aa + bb$; & comme c'eſt la ſolution de ce problême général qui nous conduit immédiatement aux imaginaires, il eſt aiſé d'en conclure qu'elles ne ſont autre choſe qu'une expreſſion abſurde à laquelle on arrive néceſſairement toutes les fois que l'on regarde comme produit ce qui n'en eſt pas un. Je dois ces principes à feu M. BOISELOU,

dont les Savants regrettent encore la perte aſſez récente. Cette Théorie appartiendroit plus ſans doute aux Eléments d'Algebre pure ; mais comme nous pourrons être encore long-temps ſans avoir un Cours vraiment complet en ce genre, j'ai cru qu'on ne ſeroit pas fâché de trouver ici ces vérités fondamentales. On verra ſur la fin de l'Ouvrage des applications aſſez curieuſes de ces recherches à la réſolution des équations du troiſieme & quatrieme degré par le cercle.

Peut-être ſe trouvera-t-il quelques perſonnes qui regarderont cette partie de l'Ouvrage, comme un étalage inutile de formules algébriques dans un Traité de Trigonométrie ſphérique. Je crois être en droit de les prier de ſuſpendre leur jugement, au moins juſqu'à ce qu'ils ayent entrepris l'étude des différents ouvrages de calcul relatifs à la Théorie de NEWTON. L'Aſtronomie eſt devenue une ſcience ſi délicate qu'on ne ſauroit avoir trop de moyens de ſimplifier les calculs qu'elle entraîne, & de perfectionner les diverſes parties dont elle dépend. Au reſte, ceux qui ne ſe deſtinent pas d'une maniere particuliere à cette étude, pourront ſe contenter des cinq ou ſix premiers Théorêmes du premier Chapitre. Comme j'ai tâché de réunir dans un même ouvrage la pratique la plus facile & la plus ſimple avec une Théorie beaucoup plus étendue, j'ai eu ſoin de diſpoſer les matieres, de maniere que ceux qui ne poſſéderoient que leurs élé-

ments, puſſent entendre ſans aucune difficulté tout ce qui conſtitue la Trigonométrie ſphérique proprement dite, qui ſe réduit aux deux Chapitres ſuivants.

Je démontre dans le ſecond Chapitre les principales propriétés des Triangles ſphériques, après avoir expoſé les notions générales qui y ont rapport; & c'eſt la premiere des trois Sections dans leſquelles ce Chapitre eſt diviſé. La ſeconde a pour objet la réſolution des triangles ſphériques rectangles. Comme cette partie eſt d'un uſage continuel, je me ſuis appliqué à lui donner la plus grande ſimplicité dont elle pût être ſuſceptible. Chaque Théorême n'a beſoin que d'une analogie pour être démontré. Pour aider encore davantage à retenir les différentes ſolutions, j'ai ajouté la démonſtration du Théorême général de NÉPER, qui réduit les ſeize cas des triangles rectangles à deux, & qui n'a beſoin que de l'énumération de ces mêmes cas, dont chacun ſe vérifie ſur le champ par une ſeule analogie.

La troiſieme Section renferme la réſolution de tous les cas des triangles ſphériques obliquangles. J'y joins un Théorême analogue à celui de NÉPER ſur les triangles rectangles, & qui eſt le même que M. PINGRÉ a donné dans les Mémoires de l'Académie. J'y ai néanmoins fait quelques changements que j'ai cru propres à le rendre encore plus ſimple. Outre les ſolutions déja connues du cas des trois côtés ou des trois angles, j'en ai donné pluſieurs autres que je

crois nouvelles. On ne peut s'empêcher, en étudiant les Traités ordinaires de Trigonométrie, d'être ſurpris que l'on cherche un angle par le ſinus de ſa moitié. Ce choix ſemble biſarre : pourquoi n'y emploie-t-on pas le ſinus ou coſinus tout entier de ce même angle, ou ſa tangente ou ſa cotangente ? L'énumération complette des différentes ſolutions que je donne ici, pouvoit ſeule juſtifier cette pratique. Elle nous apprend en effet que de toutes les formules qu'on pouvoit deſirer, elle eſt la plus ſimple, ainſi que celle du coſinus de la même moitié de l'angle cherché. Les applications de ces formules à la Trigonométrie rectiligne donnent auſſi des ſolutions beaucoup plus faciles que celle qu'on trouve dans tous les Eléments.

Cette Section eſt terminée par une démonſtration complette des fameuſes analogies de NÉPER, qui ont été défigurées & altérées dans le Cours de M. WOLF. Il paroît que NÉPER s'étoit propoſé de ramener la Trigonométrie ſphérique à la rectiligne, afin de donner un moyen de retenir aiſément toutes ces ſolutions: mais il eſt plus naturel de déduire la Trigonométrie rectiligne des formules générales pour les différents cas des triangles ſphériques. Les démonſtrations de ces Théorêmes en amenent pluſieurs autres également généraux, dont M. SIMPSON n'a donné que des cas particuliers. Ce Chapitre contient tout ce qui eſt eſſentiel à la réſolution des triangles ſphériques ; & ceux qui ne voudroient apprendre que cette partie

de la Géométrie, peuvent n'étudier que ce Chapitre seul, & passer tout de suite au sixieme, où j'ai réuni quelques exemples en nombres relatifs aux différents cas, pour montrer aux Commençants la maniere de pratiquer les formules sur les Logarithmes.

Le troisieme Chapitre a pour objet les solutions géométriques ou graphiques de différents cas que l'on vient de résoudre par analogies. Je me suis servi de préférence des projections ortographiques, dont les Astronomes supposent à chaque instant une Théorie complette. J'y ai joint aussi quelque chose sur les projections stéréographiques, à cause de leur grand usage dans les cartes de Géographie; enfin je donne encore une autre solution facilement applicable à tous les cas, & déduite du développement des parties du triangle à résoudre.

Le quatrieme Chapitre n'est qu'une application de l'analyse algébrique aux constructions géométriques du Chapitre précédent. C'est dans cette partie qu'à l'aide du calcul on épuise en quelque sorte toutes les solutions particulieres à chaque cas. Toutes les analogies du second Chapitre se déduisent par de simples substitutions; une foule de nouvelles formules se joignent à celles que l'on connoissoit déja. On peut, sans craindre de s'égarer, commencer par les cas les plus généraux, en suivant une route opposée à celle qu'on avoit tenu jusques-là. On arrive aussi à des solutions, qui d'abord paroissent essentiellement différentes de celles

qui ont été trouvées pour les mêmes cas. Une expreſſion fort compliquée d'un problême aſſez ſimple feroit preſque ſupçonner une mal-adreſſe dans les ſolutions algébriques ; mais on en découvre bien-tôt l'accord & l'identité, & l'on en déduit des pratiques heureuſes de conſtruire de la maniere la plus ſimple des expreſſions aſſez difficiles. Comme on peut ſouvent trouver dans différentes queſtions aſtronomiques des formules ſemblables à celles que l'analyſe nous a fait découvrir, j'enſeigne la maniere de ramener les plus compliquées aux Logarithmes. Je donne enſuite la ſolution des équations du ſecond & troiſieme degré par les Tables des Sinus ; ce qui peut être de la plus grande commodité, lorſque l'on ne doit point eſpérer de racines commenſurables. Les réſolutions du troiſieme degré m'ont été communiquées par un Magiſtrat déja connu avantageuſement par différents Ouvrages, & moins eſtimable encore par ſes connoiſſances profondes que par l'excellence de ſon caractere. Je lui dois auſſi la ſolution nouvelle du Problême du plus court crépuſcule que j'ai inſeré dans le cinquieme Chapitre qui ſuivra celui-ci.

Cette partie de l'Ouvrage n'eſt autre choſe qu'une traduction de l'excellent morceau de M. Côtes, intitulé: *De æſtimatione errorum in mixtâ Matheſi*, c'eſt une application de l'analyſe moderne ou du calcul des fluxions à l'une & à l'autre Trigonométrie. J'ai déduit tout ce qui a rapport aux triangles rectilignes des formules des

triangles ſphériques, afin de ſimplifier encore la Théorie, & d'abréger, le plus qu'il m'étoit poſſible, un Ouvrage qui devenoit beaucoup plus long que je ne m'étois propoſé d'abord. Cette Théorie eſt ſuffiſamment éclaircie par des applications à différents exemples en nombres.

Le ſixieme Chapitre n'eſt qu'une collection de différents problêmes d'Aſtronomie ſphérique, pour montrer la maniere d'appliquer ou de conſtruire par les Logarithmes les différentes formules des Chapitres précédents. J'ai cru qu'il ſeroit plus agréable d'appliquer ces ſolutions à des dénominations ainſi déterminées, que de réſoudre des triangles, pour ainſi dire, abſtraits. Comme les principes de la ſphere ſont ſuffiſamment connus de la plupart des jeunes gens qui ont fait une bonne Philoſophie, je me ſuis permis de faire différentes applications ſoit des conſtructions géométriques, ſoit des ſolutions numériques aux principaux cercles de la ſphere ; & c'eſt ce qui m'a déterminé à donner à cet Ouvrage le titre de Principes d'Aſtronomie ſphérique.

Pour rendre encore la pratique des calculs plus ſimple & plus facile, j'ai fait joindre à ce Traité trois Tables qui renferment le précis de l'Ouvrage entier, au moins quant à la pratique la plus ordinaire. Au lieu de déſigner les parties des triangles à réſoudre par des lettres, j'ai mieux aimé les exprimer par les données mêmes du Problême ; ce qui m'a paru plus commode, & moins ſujet à erreur dans les calculs.

La premiere Table eſt pour la réſolution des triangles ſphériques rectangles : la ſeconde pour les obliquangles : la troiſieme eſt auſſi deſtinée à la réſolution des cas des triangles obliquangles ; mais par les analogies de NÉPER, elle s'applique également aux triangles rectilignes quelconques. Elle peut avoir de plus ce grand avantage, que par la parfaite analogie qui regne entre ces deux eſpeces de Triangles pour les réſolutions des cas ſemblables : on peut apprendre la Trigonométrie ſphérique en un quart-d'heure, lorſqu'on ſait déja les proportions pour les triangles rectilignes.

Il me reſte à dire un mot du motif qui m'a déterminé à entreprendre ce petit Traité. Ayant été dans le cas d'enſeigner les Eléments d'Aſtronomie de feu M. l'Abbé DE LA CAILLE, le petit Traité de Trigonométrie qui eſt à la tête de ſon Ouvrage, m'a donné l'idée de celui que je publie aujourd'hui. Comme un grand nombre des formules qu'il a données, ſe trouvent ſans démonſtration, & que les Commençants aiment toujours d'aſſûrer leur marche dans l'étude des vérités Mathématiques ; j'ai cru me rendre utile en leur donnant un ſecours dont la plupart ne peuvent ſe paſſer.

Il y a plus, ce Traité étant le ſeul qui réunit les différentes eſpeces de ſolutions dont je viens de parler, ſi l'on en excepte les ſolutions géométriques, étoit auſſi le plus complet que nous euſſions ſur cette partie. Je ſouhaite que celui-ci réponde au but que je me ſuis propoſé.

S'il peut mériter le ſuffrage du Public, il ſera ſuivi d'un autre ſur la Gnomonique, qui en feroit une ſeconde Partie. C'eſt particuliérement dans cette partie des Mathématiques que la Trigonométrie ſphérique s'applique le plus heureuſement. Les deſcriptions des Cadrans par des lignes ſont trop peu exactes pour mériter une certaine confiance. Nous n'avons point encore de Traité de Gnomonique où tout ait été ſoumis au calcul des triangles ſphériques. Cependant cette Théorie ſeroit de la plus grande importance dans la pratique, & la généralité des ſolutions les rend encore plus intéreſſantes, en ce que les différents angles horaires qu'on ne calcule communément que par une ſuite de triangles, lorſqu'on n'y emploie que la Trigonométrie rectiligne, peuvent être déterminés indépendamment les uns des autres par le moyen des triangles ſphériques.

EXTRAIT des Regiſtres de l'Académie Royal des Sciences.

Du 27 Juin 1764.

MESSIEURS CLAIRAUT & PINGRÉ qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. MAUDUIT, intitulé : *Principes d'Aſtronomie ſphérique*, ou *Traité complet de Trigonométrie ſphérique*, &c, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé que cet Ouvrage étoit concis ſans obſcurité ; méthodique ſans affectation ; propre à faciliter les ſuccès de ceux qui s'occupent de l'étude de la Trigonométrie ſphérique, ou qui en veulent appliquer les principes aux autres Sciences Mathématiques, & qu'il méritoit d'être impriné avec ſon Approbation & ſous ſon Privilege : en foi de quoi j'ai ſigné le préſent certificat. A Paris le 29 Juin 1764.

GRANDJEAN DE FOUCHY, *Secr. perp. de l'Academie Roy. des Sciences.*

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre: A nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien-amés LES MEMBRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, Nous ont fait expoſer qu'ils auroient beſoin de nos Lettres de Privilege pour l'impreſſion de leurs Ouvrages: A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Expoſans, Nous leur avons permis & permettons par ces Préſentes de faire imprimer, par tel Imprimeur qu'ils voudront choiſir, toutes les Recherches ou Obſervations journalieres, ou Relations annuelles de tout

ce qui aura été fait dans les Aſſemblés de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Traités ou Mémoires de chacun des Particuliers qui la compoſent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner leſdits Ouvrages, & qu'ils ſeront jugés dignes de l'impreſſion, en tels volumes, forme, marge, caractères, conjointement, ou ſéparément & autant de fois que bon leur ſemblera, & de les faire vendre & débiter par-tout notre Royaume, pendant le tems de vingt années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes; ſans toutefois qu'à l'occaſion des Ouvrages ci-deſſus ſpécifiés, il puiſſe en être imprimé d'autres qui ne ſoient pas de ladite Académie: faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance; comme auſſi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre & débiter leſdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit deſdits Expoſans, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans; dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auxdits Expoſans, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères, conformément aux Réglemens de la Librairie; qu'avant de les expoſer en vente, les Manuſcrits ou Imprimés qui auront ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Ouvrages, ſeront remis ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un en celle de notre Château du Louvre, & un en celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, le tout à peine de nullité deſdites Préſentes: du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir leſdits Expoſans & leurs ayans cauſe pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Préſentes qui ſera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages, ſoit tenue pour dûement ſignifiée; & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers & Secre-

taires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire, pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant Clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires; CAR tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris le dix-neuvieme jour du mois de Mars, l'an de grace mil ſept cent cinquante, & de notre Regne le trente cinquieme. Par le Roi en ſon Conſeil.

Signé, MOL.

Regiſtré ſur le Regiſtre XII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 430, folio 309, conformément au Réglement de 1723, qui fait défenſes, article 4, à toutes perſonnes, de quelque qualité qu'elles ſoient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour les vendre, ſoit qu'ils s'en diſent les Auteurs ou autrement; à la charge de fournir à la ſuſdite Chambre huit exemplaires de chacun, preſcrits par l'art. 108 du même Réglement. A Paris le 5 Juin 1750.

Signé, LE GRAS, Syndic.

PRINCIPES

PRINCIPES D'ASTRONOMIE SPHÉRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires sur les différentes lignes que l'on considere dans la Trigonométrie, & dont nous ferons un usage plus fréquent dans cet Ouvrage.

Définitions.

Art. 1. On appelle *Sinus* d'un arc AM ou d'un angle ACM une droite MP abaissée d'une des extrémités de cet arc perpendiculairement au rayon qui passe par l'autre extrémité (*fig.* 1).

2. D'après cette définition il est aisé de voir que la droite MQ est le sinus de l'arc BM complément de l'arc

AM; cette ligne considérée par rapport à l'arc AM, est appellée son *Cosinus*.

3. Une droite AT perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon, & terminée au rayon prolongé qui passe par l'autre extrémité M d'un arc AM, se nomme *Tangente* de cet arc.

4. Une droite Bt tangente de l'arc BM complément de l'arc AM considérée par rapport au même arc AM, se nomme *Cotangente* de cet arc.

5. La partie du rayon compriſe entre le centre du cercle & la tangente d'un arc, ſe nomme *Sécante* de cet arc; ainſi CT eſt la ſécante de l'arc AM, & Ct eſt la ſécante de l'arc BM. Si l'on conſidere la ſécante Ct par rapport à l'arc AM qui eſt le complément de l'arc BM auquel elle appartient, cette ligne ſera nommée la *Coſécante* de l'arc AM.

6. La partie du rayon compriſe entre la circonférence & le ſinus d'un arc, s'appelle ſon *Sinus-verſe*; ainſi AP eſt le ſinus-verſe de l'arc AM, & BQ le ſinus-verſe de l'arc BM. *a*P & *b*Q ſont les ſinus-verſes des angles obtus *a*CM, *b*CM. Si l'on conſidere le ſinus-verſe BQ en tant qu'il appartient à un arc qui eſt le complément de AM, on le nommera *Coſinus-verſe* de l'arc AM, & réciproquement AP ſera le coſinus-verſe de l'arc BM.

COROLLAIRE.

7. Il ſuit des définitions précédentes que deux angles ſuppléments l'un de l'autre ont le même ſinus, le même coſinus, la même tangente, la même cotangente, la même ſécante, la même coſécante, & les mêmes ſinus-verſes. Seulement il eſt à remarquer que pour l'angle obtus, il faut regarder comme complément de cet angle l'angle qu'il faut en retrancher pour avoir un droit; lequel angle eſt évidemment le même que celui qu'on ajoute à l'angle aigu. Ainſi ce complément eſt à ſouſtraire.

AVERTISSEMENT.

8. Dans toute la ſuite de cet Ouvrage nous déſignerons toujours le rayon du cercle par R ou *r*; quelquefois on le ſuppoſe égal à l'unité, mais il eſt mieux de l'exprimer, afin de conſerver autant qu'on peut l'homogénéité des termes dans les calculs. De même nous déſignerons toujours le ſinus d'un arc par *ſin*; ſon coſinus par *coſ.* ſa tangente par *tang.* ſa cotangente par *cot.* ſa ſécante par *ſec.* ſa coſécante par *coſec.* ſon ſinus-verſe par *ſin. verſ.* & ſon coſinus-verſe par *coſ. verſ.* Dans les expreſſions algébriques, nous ferons le ſinus $= s$; le coſinus $= c$; la tangente $= t$; la cotangente $= \tau$; la ſécante $=$ S & la coſécante $= \int$. le ſinus-verſe $= v$, & le coſinus-verſe $= u$.

THÉOREME I.

9. *Soit un arc de cercle quelconque* AM (*fig.* 1.) *que nous déſignerons toujours par* A *dont* PM *eſt le ſinus &* MQ *le coſinus*; AT *la tangente*, *&* Bt *la cotangente*; *je dis que le coſinus eſt au ſinus comme le rayon eſt à la tangente*, *c'eſt-à-dire*, que l'on aura *coſin* A : *ſin* A : : R : *tang* A.

DÉMONSTRATION.

Les triangles ſemblables CPM, CAT, donnent CP : PM : : CA : AT; ou *coſ* A : *ſin* A : : R : *tang* A. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

10. Les triangles CQM, CB*t* étant auſſi ſemblables donneront CQ : QM : : CB : B*t* ou *ſin* A : *coſ* A : : R : *cot* A.

COROLLAIRE II.

11. Il ſuit delà que $tang\ A = \frac{ſin\ A}{coſ\ A} \times R$, & que *cot* A

$= \frac{cof\,A \times R}{fin\,A}$ ou algébriquement $t = \frac{sr}{c}$ & $\tau = \frac{cr}{s}$. D'où l'on tire encore $fin\,A \times R = cof\,A \times tang\,A$, & $cof\,A = \frac{fin\,A \times tang\,A}{R} = \frac{fin\,A\ cot\,A}{R}$.

COROLLAIRE III.

12. Il ſuit encore delà que les cotangentes d'une ſuite d'arcs quelconques ſont toujours en raiſon inverſe des tangentes des mêmes arcs; puiſque l'on a évidemment $t : \tau :: \frac{sr}{c} : \frac{cr}{s} :: \frac{s}{c} : \frac{c}{s}$. En un mot on aura $tang\,A = \frac{RR}{cotang\,A}$, d'où il ſuit que $tang\,A \times cot\,A = RR$, d'où l'on voit que le rayon eſt moyen proportionnel entre la tangente d'un arc & celle de ſon complément; ce qui pourroit encore ſe démontrer ſur le champ par les triangles ſemblables CAT, CB*t*.

THÉOREME II.

13. *Soit toujours un arc quelconque* AM; *je dis que l'on aura cette proportion; Le rayon eſt au double du ſinus de l'arc* AM, *comme le coſinus de cet arc eſt au ſinus de l'arc double. Ou, ce qui revient au même*, (fig. 2.) R : 2 ſin A : : cof A : ſin 2A ou *alternando*; R : cof A : : 2 ſin A : ſin 2A.

DÉMONSTRATION.

Les triangles rectangles APC, AQN ayant un angle commun en A, ſont ſemblables & donnent AC : CP : : AN ou 2PA : QN; c'eſt-à-dire, R : *cof* A : : 2*ſin* A : *ſin* 2A; *C. Q. F. D.*

Si l'on vouloit avoir pareillement l'expreſſion du coſinus de l'arc double, les triangles ſemblables CPA, CQO donneront CA : CP : : CO : CQ, d'où l'on tirera ſur le champ $CQ = \frac{2\,cof^2\,A - RR}{R}$ en mettant pour CO ſa valeur tirée de ce que OP = PT.

COROLLAIRE IV.

14. Il ſuit delà que l'on aura $\frac{1}{2} \mathit{ſin}\ 2A = \frac{\mathit{coſ}\ A \times \mathit{ſin}\ A}{R}$. Cette équation n'eſt autre choſe que celle qui ſe tire en prenant le produit des extrêmes & des moyens de la derniere proportion. Si l'on met pour *coſ* A ſa valeur $\frac{\mathit{ſin}\ A \times \mathit{cot}\ A}{R}$, on aura encore $\frac{1}{2} \mathit{ſin}\ 2A = \frac{\mathit{ſin}^2 A \times \mathit{cot}\ A}{RR}$, ou $\frac{1}{2} \mathit{ſin} 2A = \frac{\mathit{ſin}^2 A}{\mathit{tang}\ A}$ en ſubſtituant la tangente à la cotangente.

THÉOREME III.

15. *Le rayon eſt moyen proportionnel, 1°, entre le coſinus d'un arc & la ſécante ; 2°, entre le ſinus du même arc & la ſécante de ſon complément* (fig. 3) ; *c'eſt-à-dire*, que l'on aura ces deux analogies ; *coſ* A : R : : R : *ſec* A : & *ſin* A : R : : R : *coſec* A.

DÉMONSTRATION.

Les triangles ſemblables CPM, CAT, CB*t* donnent 1°, CP : CA : : CM : CT ou *coſ* A : R : : R : *ſec* A. 2°, PM : CM : : CB : C*t* ou *ſin* A : R : : R : *coſec* A. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

16. Il ſuit delà que l'on aura $\frac{\mathit{ſec}\ A \times R}{\mathit{coſec}\ A} = \mathit{tang}\ A$. Car on a vu ci-devant (n°. 11) que $\mathit{tang}\ A = \frac{\mathit{ſin}\ A}{\mathit{coſ}\ A} \times R$. Or cette quantité eſt auſſi le quotient de *ſec* A diviſée par *coſec* A, & multipliée par le rayon.

COROLLAIRE II.

17. Il ſuit encore delà que ſi l'on a deux arcs de cercle A & B, les ſinus de ces arcs ſeront réciproquement proportionnels aux ſécantes de leurs compléments, & les coſinus de ces mêmes arcs ſeront réciproques à leurs

sécantes ; car puisque *cosec* A $= \frac{RR}{sin\ A}$, on aura aussi *cosec* B $= \frac{RR}{sin\ B}$; & de même puisque *sec* A $= \frac{RR}{cosin\ A}$ on aura aussi *sec* B $= \frac{RR}{cos\ B}$; donc on aura ces deux analogies, *Cosec* A : *cosec* B : : $\frac{RR}{sin\ A} : \frac{RR}{sin\ B}$: : *sin* B : *sin* A ; & *sec* A : *sec* B : : $\frac{RR}{cos\ A} : \frac{RR}{cos\ B}$: : *cos* B : *cos* A.

THÉOREME IV.

18. *Soient divisés l'arc* AM *& son complément* BM *en deux parties égales aux points* K *&* k, *& soient tirées les lignes* CKl, CkL *jusqu'à ce qu'elles rencontrent les tangentes* AT & Bt *prolongées, autant qu'il sera nécessaire, en* l *&* L ; je dis que l'on aura 1°, *sec* A = *cot* $\frac{1}{2}$ *comp.* A — *tang* A ; 2°, *cosec* A = *cot* $\frac{1}{2}$ A — *cot* A.

DÉMONSTRATION.

Les triangles rectangles CBo & CAL étant semblables à cause des paralleles, on aura l'angle ALC = l'angle BC*o* ; mais BC*o* = *o*CM (par construction). Donc le triangle CTL est isoscele, donc on aura LT = CT ; mais LT = AL — AT = *cot* $\frac{1}{2}$ *comp* AM & AT = *tang* AM ; donc 1°, CT ou *sec* A = *cot* $\frac{1}{2}$ *comp* A — *tang* A. *C. Q. F.* 1°, *D.*

2. Les triangles CAO & CB*l* rectangles étant semblables à cause des paralleles CA & B*l*, on aura l'angle B*l*C = ACO ; mais ACO = MCO (par const.) donc le triangle C*tl* est isoscele ; donc la cosécante C*t* = *tl* ; de plus il est visible que *tl* = B*l* — Bt = *cot* $\frac{1}{2}$ A — *cot* A. Donc aussi la cosécante C*t* de l'arc AM est égale à cette même quantité. *C. Q. F.* 2° *D.*

THÉOREME V.

19. *Du point* M *aux extrémités* b, a (fig. 3) *des diametres* Bb, Aa ; *soient menées les lignes* Mb, Ma *qui*

coupent les rayons CA *&* CB *aux points* G *&* g; *ſoit de plus mené par le même point* M *la perpendiculaire* θMτ *terminée aux rayons* CA *&* CB *prolongés, autant qu'il ſera néceſſaire, en* θ *&* τ, *& ſur leſquels elles déterminent les lignes* Cθ *&* Cτ *reſpectivement égales à la ſécante & à la coſécante de l'arc* AM : *Cela poſé, je dis* que l'on aura 1°, *ſecant* A = *tang* A + *tang* $\frac{1}{2}$ *comp* A. 2°, *coſec* A = *cot* A + *tang* $\frac{1}{2}$ A.

DÉMONSTRATION.

L'angle *b*Mθ étant formé par une tangente Mθ & par la corde M*b*, a pour meſure la moitié de l'arc M*Ab* compris entre ſes côtés; & l'angle MGθ qui a ſon ſommet au dedans de la circonférence, a pour meſure la demi-ſomme des arcs *ab*, AM compris entre ſes côtés, mais *ab* = A*b*; ainſi cet angle eſt égal à l'angle GMθ, donc le triangle GθM eſt iſoſcele, & par conſéquent Gθ = Mθ = *tang* A. De plus, l'angle C*b*G étant à la circonférence n'eſt que la moitié de l'angle BCM qui a ſon ſommet au centre, & qui eſt appuyé ſur le même arc; donc ſi on regarde le rayon C*b* comme le ſinus total, CG ſera la tangente du demi-complément de l'arc AM; donc la *ſec* Cθ = CG + Gθ = *tang* $\frac{1}{2}$ *comp* A + *tang* A. *C. Q. F.* 1°, *D.*

2°. On prouvra préciſément de la même maniere que *g*τ = Mτ = *cot* A, & que C*g* = *tang* $\frac{1}{2}$ A. D'ailleurs il eſt viſible que Cτ = *coſec* A; donc on aura *coſec* A = *cot* A + *tang* $\frac{1}{2}$ A. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

20. Il ſuit des deux théorêmes précédents que l'on aura 1°, *cot* $\frac{1}{2}$ *comp* A — *tang* A = *tang* $\frac{1}{2}$ *comp* A + *tang.* A. 2°, *Cot* $\frac{1}{2}$ A — *cot* A = *cot* A + *tang* $\frac{1}{2}$ A; en comparant les deux expreſſions des ſécantes & coſécantes de l'arc AM; d'où il ſuit qu'on aura auſſi 2 *tang* A = *cot* $\frac{1}{2}$ *comp* A — *tang* $\frac{1}{2}$ *comp* A; & encore 2 *cot* A

$= cot \frac{1}{2} A - tang \frac{1}{2} A$. Et ſi à la place de cotang. dans le ſecond membre de chaque équation on met ſa valeur $\frac{RR}{tang}$ (n°. 12), on aura $tang A = \frac{RR - tang^2 \frac{1}{2} comp A}{2 tang \frac{1}{2} comp A}$ & $cot A = \frac{RR - tang^2 \frac{1}{2} A}{2 tang \frac{1}{2} A}$. D'où il eſt facile de déduire les deux analogies ſuivantes.

$2 tang \frac{1}{2} comp A : R + tang \frac{1}{2} comp A :: R - tang \frac{1}{2} comp A : tang A$.

Et $2 tang \frac{1}{2} A : R + tang \frac{1}{2} A :: R - tang \frac{1}{2} A : cot A$. La premiere de ces deux analogies peut encore ſe changer en celle-ci. $2 Tang (45° - \frac{1}{2} A) : R + tang (45° - \frac{1}{2} A) :: R - tang (45° - \frac{1}{2} A) : tang A$.

THÉOREME VI.

21. *Soit toujours un arc quelconque* AM *décrit d'un rayon* CA, *je dis* que l'on aura 1°, $1 + cof A = 2 cof^2 \frac{1}{2} A = \frac{ſin A \times R}{tang \frac{1}{2} A}$; 2°, $1 - cof A = 2 ſin^2 \frac{1}{2} A = ſin A \times tang \frac{1}{2} A$; enfaiſant le rayon = à l'unité.

DÉMONSTRATION.

Soit d'abord tirée par les extrémités B, M (*fig.* 4) du diametre AB, & de la corde AM la corde BMT terminée à la tangente de l'arc AM en un point T, & ſoient encore menées par le centre C les droites CK & CL reſpectivement paralleles aux droites BM & AM : il eſt viſible que AT ſera le double de la tangente de la moitié de l'arc AM; CD ou ML ou LB ſeront le coſinus de la moitié du même arc.

Cela poſé, les triangles ſemblables BLC, BPM donneront BC : BL :: BM : BP :: 2BL : BP, donc $BP = \frac{2BL^2}{BC}$, c'eſt-à-dire, que $1 + cof A = 2 cof^2 \frac{1}{2} A$. Pareillement à cauſe des triangles ſemblables CLB & APM, on a CB : CL :: AM : AP; donc $AP = \frac{2AD^2}{CB}$, puiſque

AM = 2 AD ou 2 DM ou 2 CL ; donc $1 - cos\,A = 2\,sin^2 \frac{1}{2} A$. C. Q. F. 1°, D.

2°. A cauſe des triangles ſemblables APM, BAT & BPM, on aura les deux proportions BP : PM : : BA : AT, ou $1 + cos\,A : sin\,A :: 2R : 2\,tang \frac{1}{2} A$; & encore PM : AP : : AB : AT ; ou $sin\,A : 1 - cos\,A :: 2R : 2\,tang \frac{1}{2} A$; donc $1 + cos\,A = \frac{sin\,A \times R}{tang \frac{1}{2} A}$ & $1 - cos\,A = \frac{sin\,A \times tang \frac{1}{2} A}{R}$. C. Q. F. 2°, D.

COROLLAIRE.

22. Donc $\frac{1 - cos\,A}{1 + cos\,A} = \frac{tang^2 \frac{1}{2} A}{RR}$; & $\frac{1 + cos\,A}{1 - cos\,A} = \frac{cotang^2 \frac{1}{2} A}{RR}$; de plus il ſuit encore delà que ſi l'on nomme V & v les ſinus-verſes AP, BP d'un arc AM, on aura $V = \frac{2\,sin^2 \frac{1}{2} A}{R}$ & $v = \frac{2\,cos^2 \frac{1}{2} A}{R}$ ou $\frac{VR}{2} = sin^2 \frac{1}{2} A$ & $\frac{vR}{2} = cos^2 \frac{1}{2} A$.

En nommant A l'arc MG complément de AM on aura par les triangles ſemblables AMP, MPB & AMB les formules ſuivantes. $R + sin\,A = 2\,sin^2 (45° + \frac{1}{2} A)$, & $R - sin\,A = 2\,sin^2 (45° - \frac{1}{2} A)$ & $\frac{R + sin\,A}{R - sin\,A} = \frac{sin^2 (45° + \frac{1}{2} A)}{sin^2 (45° - \frac{1}{2} A)}$.

PROBLEME.

23. *Etant donnés deux arcs quelconques* AM & AN ; *trouver le ſinus de leur ſomme & de leur différence* (fig. 5).

SOLUTION.

Soit déſigné le plus grand arc par A & le plus petit par B, ſoit prolongé le ſinus MP du plus grand arc AM, juſqu'à ce qu'il rencontre le rayon CN qui paſſe par l'extrémité du plus petit arc dans un point R ; enfin ſoit menée la droite ML perpendiculaire au même rayon, laquelle ſera le ſinus de la ſomme des arcs AM & AN.

Cela posé, les triangles semblables CQN, CPR donnent CQ : QN :: CP : PR ou *cos* B : *sin* B :: *cos* A : PR $= \frac{\cos A \times \sin B}{\cos B}$; donc RM $= \sin A + \frac{\cos A \times \sin B}{\cos B}$; de plus les triangles semblables NQC, RLM donnent encore NC : QC :: MR : ML, ou bien R : *cos* B :: *sin* A $+ \frac{\cos A \times \sin B}{\cos B}$: *sin* (A + B). $= \frac{\sin A \times \cos B + \sin B \times \cos A}{R}$.

C. Q. F. 1°, *D.*

2°. Pour trouver le sinus de la différence de deux arcs, nous regarderons actuellement MN comme le plus grand que nous avons nommé A, & l'arc AN comme le plus petit que nous désignerons toujours par B. Cela posé, les triangles semblables CQN, CLO donnent CQ : QN :: CL : LO; ou *cos* B : *sin* B :: *cos* A : LO $= \frac{\cos A \times \sin B}{\cos B}$; donc OM $= \sin A - \frac{\cos A \times \sin B}{\cos B}$; de plus à cause des triangles semblables MPO, CQN, on aura CN : CQ :: OM : PM; ou R : *cos* B : : *sin* A $- \frac{\cos A \times \sin B}{\cos B}$: *sin* (A − B) $= \frac{\sin A \times \cos B - \sin B \times \cos A}{R}$.

C. Q. F. 2°, *D.*

PROBLEME II.

24. *Trouver le cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs quelconques* A *&* B (fig. 5).

SOLUTION.

Les triangles CQN & MPO étant semblables puisqu'ils ont leurs côtés perpendiculaires les uns sur les autres, on aura CQ : QN : : MP : PO; ou *cos* B : *sin* B : : *sin* A : PO $= \frac{\sin A \times \sin B}{\cos B}$, donc CO $= \cos A - \frac{\sin A \times \sin B}{\cos B}$. Mais on a encore à cause des triangles semblables CQN, CLO; CN : CQ : : CO : CL, ou R : *cos* B : : *cos* A $- \frac{\sin A \times \sin B}{\cos B}$: *cos* (A + B) $= \frac{\cos A \times \cos B - \sin A \times \sin B}{R}$. *C. Q. F.* 1° *T.*

2°. En regardant l'arc MN comme A, & l'arc AN comme B, il eſt viſible que CP ſera le coſinus de la différence des mêmes arcs. Cela poſé, à cauſe des triangles ſemblables CQN, MLR; CQ : QN : : ML : LR ou $cof\,B : fin\,B : : fin\,A : LR = \frac{fin\,A \times fin\,B}{cof\,B}$; donc CR ou $CL + LR = cof\,A + \frac{fin\,A \times fin\,B}{cof\,B}$; & à cauſe des triangles ſemblables CQN, CPR, on aura CN : CQ : : RC : CP; ou bien $R : cof\,B : : cof\,A + \frac{fin\,A \times fin\,B}{cof\,B} : cof\,(A-B) = \frac{cof\,A \times cof\,B + fin\,A \times fin\,B}{R}$. C. Q. F. 2° T.

COROLLAIRE I.

25. Il ſuit des formules que nous venons de découvrir aux deux derniers problêmes que l'on aura les deux proportions ſuivantes :

Sin (A + B) : *ſin* (A − B) : : *ſin* A × *cof* B + *ſin* B × *cof* A : *ſin* A × *cof* B − *ſin* B × *cof* A, &

Cof. (A + B) : *cof* (A − B) : : *cof* A × *cof* B − *ſin* A × *ſin* B : *cof* A × *cof* B + *ſin* A × *ſin* B.

Donc en diviſant les deux termes du ſecond rapport de la premiere proportion par *cof* A × *cof* B, & ceux du ſecond rapport de la ſeconde proportion par *cof* A × *ſin* B, on aura les deux analogies ſuivantes, après avoir ſubſtitué aux nouvelles expreſſions celles des tangentes qui leur ſont égales (n°. 11).

Sin (A + B) : *ſin* (A − B) : : *tang* A + *tang* B : *tang* A − *tang* B, & de même

Cof (A + B) : *cof* (A − B) : : *cot* B − *tang* A : *cot* B + *tang* A : : *cot* A − *tang* B : *cot* A + *tang* B.

Il n'eſt pas néceſſaire d'avertir que ces proportions pourroient s'écrire ſous la forme d'une équation.

Corollaire II.

26. Puiſque l'on a *cof* (A+B) : *cof* (A—B) : : *cof* A × *cof* B — *ſin* A × *ſin* B : *cof* A × *cof* B + *ſin* A × *ſin* B, il s'enſuit que l'on aura par un *detrahendo cof* (A—B) — *cof* (A+B) = 2 *ſin* A × *ſin* B.

On trouveroit de même par un *componendo* que *cof* (A+B) + *cof* (A—B) = 2 *cof* A × *cof* B.

De même des proportions *ſin* (A+B) : *ſin* (A—B) : : *ſin* A × *cof* B + *ſin* B *cof* A : *ſin* A × *cof* B — *ſin* B × *cof* A, on trouvera encore par un *componendo* & un *detrahendo* que

2 *ſin* A × *cof* B = *ſin* (A+B) + *ſin* (A—B) & que 2 *ſin* B × *cof* A = *ſin* (A+B) — *ſin* (A—B). réuniſſant toutes ces expreſſions & diviſant par 2, on aura les ſuivantes.

$$Sin\ A \times ſin\ B = \frac{cof(A-B) - cof(A+B)}{2}; ſin\ A \times cof\ B = \frac{ſin(A+B) + ſin(A-B)}{2}.$$

$$Cof\ A \times cof\ B = \frac{cof(A+B) + cof\ A-B)}{2}; ſin\ B \times cof\ A = \frac{ſin\ (A+B) - ſin\ (A-B)}{2}.$$

Corollaire III.

27. Il ſuit encore delà que ſi l'on connoît les ſinus & coſinus de tous les arcs au-deſſous de 30°, on connoîtra auſſi les ſinus & coſinus de tous les arcs au-deſſus de 30° juſqu'à 60° par la ſouſtraction ſeule ; d'où il ſuit que ſi l'on calcule par ce moyen les ſinus & coſinus juſqu'à 45°, on aura tous les ſinus & coſinus juſqu'à 90°, puiſque le coſinus d'un angle au-deſſous de 45° eſt le ſinus d'un arc qui ſurpaſſe d'autant 45°. Pour ſaiſir la vérité de ce Corollaire, il faut faire attention que le ſinus de 30° étant la moitié de la corde de 60° ſera égal

à $\frac{R}{2}$, donc si l'on fait $A = 30°$; $fin\ A \times fin\ B = \frac{R \times fin\ B}{2} = \frac{cof(A-B) - cof(A+B)}{2}$ d'où l'on tire sur le champ $R \times fin\ B = cof(30° - B) - cof(30° + B)$ ou $cof(30° + B) = cof(30° - B) - fin\ B$, ce qui fera connoître $cof(30° + B)$, puisque l'on connoît B par l'hypotese moindre que 30°. De même puisque $fin\ A \times cof\ B = \frac{fin(A+B) + fin(A-B)}{2}$, on trouvera $cof\ B = fin(30° + B) + fin(30° - B)$, d'où l'on tire $fin(30° + B) = cof\ B - fin(30° - B)$; ce Corollaire fait voir comment on a pu construire aisément les Tables des sinus & des cosinus.

COROLLAIRE IV.

28. Si l'on suppose l'arc B successivement égal à A, 2A, 3A, &c, on trouvera aisément par la formule du premier Problême les sinus des arcs multiples. Pour cela supposant toujours que le sinus de l'arc A est désigné par s & son cosinus par c, & représentant les sinus & cosinus des arcs multiples par $fin\ A$, $fin\ 2A$, $fin\ 3A$, $fin\ 4A$, &c; $fin\ nA$ on formera aisément les Tables suivantes.

$Sin.\ A = \sqrt{rr - cc}.$

$Sin.\ 2A = 2c\sqrt{rr - cc}.$

$Sin.\ 3A = (4cc - 1)\sqrt{rr - cc}.$

$Sin.\ 4A = (8c^3 - 4c)\sqrt{rr - cc}.$

$Sin.\ 5A = (16c^4 - 12c^2 + 1)\sqrt{rr - cc}.$

$Sin.\ 6A = (32c^5 - 32c^3 + 6c)\sqrt{rr - cc}.$

$Sin.\ 7A = (64c^6 - 80c^4 + 24c^2 - 1)\sqrt{rr - cc}.$

$Sin.\ 8A = (128c^7 - 192c^5 + 80c^3 - 10c)\sqrt{rr - cc}.$

&c.

OU

$Sin.\ A = s.$

$Sin.\ 2A = 2s\sqrt{r^2 - ss}.$

$Sin.\ 3A = 3s - 4s^3.$

$Sin.\ 4A = (4s - 8s^3)\sqrt{rr - ss}.$

$Sin.\ 5A = 5s - 20s^3 + 16s^5.$

$Sin.\ 6A = (6s - 32s^3 + 32s^5)\sqrt{rr - ss}.$

$Sin.\ 7A = 7s - 56s^3 + 112s^5 - 64s^7.$

$Sin.\ 8A = (8s - 80s^3 + 192s^5 - 128s^7)\sqrt{rr - ss}.$

$Sin.\ 9A = 9s - 120s^3 + 432s^5 - 576s^5 + 256s^9.$

&c.

Pour trouver aiſément chacune de ces deux Tables, il n'y a qu'à ſuppoſer le dernier ſinus trouvé = *ſin* A, tandis que le ſinus & coſinus de B ſont conſtamment déſignés par *s* & *c*, & chercher enſuite le ſinus de la ſomme de ces deux arcs par la formule:

Sin (A + B) = *ſin* A × *coſ* B + *ſin* B × *coſ* A. Il n'eſt pas difficile de voir que l'on rendroit tous les termes de ces équations homogenes, en ſubſtituant les différentes puiſſances du rayon ou ſinus total que nous nous ſommes diſpenſés d'exprimer. On voit pareillement que la premiere ſuite donne l'expreſſion des ſinus de l'arc multiple en coſinus de l'arc ſimple, & la ſeconde donne les expreſſions des mêmes ſinus en ſinus de l'arc ſimple. Pour donner à ces formules toute la généralité dont elles ſont ſuſceptibles, nous ajouterons ici la formule générale qui convient à chaque ſuite; il eſt aiſé de voir que la ſeconde Table aura deux formules générales à cauſe de $\sqrt{rr - ss}$ qui ſe trouve à tous les termes de rang pair, ſans ſe trouver aux termes de rang impair. Quant à la maniere de trouver ces formules générales, elle ſe déduit de la conſidération des coefficients & des expoſants de chaque terme.

A *Formule générale pour la premiere ſuite.*

$$\text{Sin. } nA = \Big(2^{n-1}c^{n-1} - \overline{n-2}\times 2^{n-3}c^{n-3} + \frac{\overline{n-3}\times\overline{n-4}}{1.2}2^{n-5}c^{n-5} - \frac{\overline{n-4}\times\overline{n-5}\times\overline{n-6}}{1.2.3.}\times 2^{n-7}c^{n-7} + \frac{\overline{n-5}\times\overline{n-6}\times\overline{n-7}\times\overline{n-8}}{1.2.3.4.}2^{n-9}c^{n-9} - \&c.\Big)\sqrt{rr-cc};$$

n étant un nombre quelconque.

B *Premiere formule générale pour la ſeconde ſuite* n *étant un nombre impair quelconque.*

$$\text{Sin. } nA = ns - \frac{n\times\overline{nn-1}}{1.2.3.}s^3 + n\frac{\overline{nn-1}\times\overline{nn-9}}{1.2.3.4.5.}s^5 - n\times\frac{\overline{nn-1}\times\overline{nn-9}\times\overline{nn-25}}{1.2.3.4.5.6.7.}s^7, \&c.$$

C *Seconde formule générale pour la ſeconde ſuite* n *étant un nombre pair quelconque.*

$$\text{Sin. } nA = \Big(ns - \frac{n\times\overline{nn-4}}{1.2.3.}s^3 + \frac{n\times\overline{nn-4}\times\overline{nn-16}}{1.2.3.4.5.}s^5 - \frac{n\times\overline{nn-4}\times\overline{nn-16}\times\overline{nn-36}}{1.2.3.4.5.6.7.}s^7 + \ldots\ldots\ldots + 2^{n-1}s^{n-1}\Big)\sqrt{rr-ss}.$$

COROLLAIRE V.

29. Pareillement ſi l'on ſuppoſe encore l'arc B ſucceſſivement égal à A, 2A, 3A, 4A, &c, en ſe ſervant encore des mêmes dénominations ; & ſuivant le même procédé ſur la formule du coſinus de la ſomme de deux arcs trouvée au ſecond problême, on formera encore les deux Tables ſuivantes, dont l'une exprime les coſinus d'arcs multiples en coſinus, & l'autre en ſinus de l'arc ſimple ; on aura donc :

$Cof.\ A = c.$

$Cof.\ 2A = 2cc - 1.$

$Cof.\ 3A = 4c^3 - 3c.$

$Cof.\ 4A = 8c^4 - 8c^2 + 1.$

$Cof.\ 5A = 16c^5 - 20c^3 + 5c.$

$Cof.\ 6A = 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1.$

$Cof.\ 7A = 64c^7 - 112c^5 + 56c^3 - 7c.$

&c.

OU

$Cof.\ A = \sqrt{rr - ss}.$

$Cof.\ 2A = -2ss + rr.$

$Cof.\ 3A = (-4ss + rr)\sqrt{rr - ss}.$

$Cof.\ 4A = 8s^4 - 8s^2 + 1.$

$Cof.\ 5A = (16s^4 - 12s^2 + 1)\sqrt{rr - ss}.$

$Cof.\ 6A = -32s^6 + 48s^4 - 18s^2 + 1.$

$Cof.\ 7A = (-64s^6 + 80s^4 - 24s^2 + 1)\sqrt{rr - ss}.$

&c.

D. *Formule générale pour la premiere ſuite,* n *étant un nombre quelconque.*

$$r^{n-1}\,Cof.\,nA = 2^{n-1}c^n - \frac{n}{1}r^2\,2^{n-3}c^{n-2} + \frac{n\times n-3}{1.2.}r^4\,2^{n-5}c^{n-4} - \frac{n\times\overline{n-4}\times\overline{n-5}}{1.2.3.}r^6\,2^{n-7}c^{n-6} + \frac{n\times\overline{n-5}\times\overline{n-6}\times\overline{n-7}}{1.2.3.4.}2^{n-9}r^8\,c^{n-8} - \&c.$$

Si l'arc déſigné par A eſt obtus, ſon coſinus devient négatif, & alors toutes les formules où la lettre c ſe trouve élévée à des puiſſances impaires changent de ſigne ; ce qui aura lieu pareillement dans la formule générale lorſque n eſt impair.

Formule

F. *Formule générale de la ſeconde ſuite*, n *étant un nombre impair quelconque.*

$$\text{Cof. } nA = \left(\pm 2^{n-1} s^{n-1} \mp \overline{n-2} \times 2^{n-3} s^{n-3} \right.$$
$$\left. \pm \frac{n-3 \times n-4}{1.2.} 2^{n-5} s^{n-5} \mp \text{ \&c.} \right) \sqrt{rr - ss.}$$

G. *Formule générale de la ſeconde ſuite*, n *étant un nombre pair quelconque.*

$$\mp r^{n-1} \text{ Cof. } nA = 2^{n-1} s^n - \frac{n}{1} r^2 2^{n-3} s^{n-2} +$$
$$\frac{n \times n-3}{1.2.} r^4 2^{n-5} s^{n-4} - \frac{n \times \overline{n-4} \times \overline{n-5}}{1.2.3.} r^6 2^{n-7} s^{n-6}$$
$$+ \frac{n \times \overline{n-5} \times \overline{n-6} \times \overline{n-7}}{1.2.3.4.} 2^{n-9} r^8 s^{n-8} - \text{ \&c.}$$

Les ſignes ſupérieurs ont lieu dans la premiere formule, lorſque le nombre impair eſt l'un des nombres impairs 1, 5, 9, 13, &c; & les chiffres inférieurs dans les cas où *n* eſt l'un des nombres impairs 3. 7. 11. &c.

De même dans la ſeconde formule les ſignes ſupérieurs ont lieu, lorſque le nombre eſt pairement pair ; & le ſigne inférieur eſt pour les nombres qui ne ſont pas pairement pairs.

SCHOLIE.

30. On pourroit déduire des formules générales que nous venons de donner un grand nombre de vérités intéreſſantes, ſur la nature des racines des équations ; dans la crainte de nous étendre trop loin nous renvoyons nos Lecteurs aux ouvrages de M. Euler, où l'on trouvera tout le détail qu'on pourroit deſirer ſur cette matiere. Nous nous contenterons d'appliquer ces formules à la théorie des puiſſances des ſinus & coſinus, que nous réduirons à deux Problêmes. Le premier ; *étant donnée une puiſſance quelconque d'un ſinus ou d'un coſinus, trouver l'expreſſion de cette puiſſance en ſinus &*

cosinus de l'arc simple ou de ses multiples. Le second que nous venons de résoudre, n'a besoin que d'être énoncé, & se réduit à *exprimer un sinus ou cosinus d'un arc multiple par des puissances du sinus ou cosinus de l'arc simple.* M. Euler déduit les formules qu'il a donné sur cette théorie des formules que nous avons exposées au n°. 26; il nous a paru qu'elles se tiroient plus aisément des formules précédentes.

PROBLEME III.

31. *Exprimer les puissances des sinus & cosinus d'un arc quelconque par les sinus & cosinus de ce même arc ou de ses multiples.*

SOLUTION.

Ce Problême renferme deux parties : nous allons d'abord chercher les formules qui donnent les valeurs des puissances des sinus. Pour cela je ferai usage des deux tables données aux deux derniers Corollaires, & dans lesquelles on a employé la lettre s qui désigne le sinus de l'arc simple. Pour peu qu'on y fasse attention, l'on verra que les termes de rangs impairs de la seconde table du n°. 28, donneront les valeurs des puissances impaires de la lettre s, & les termes de rang pair de la seconde table du Corollaire V donneront les puissances paires du même sinus; observant d'éliminer dans les termes ultérieurs les puissances qui pourroient s'y rencontrer. Ainsi de $\sin A = s$, on tire $\sin A = \sin A$.

De même de l'équation $\cos 2A = -2ss + rr$; on tire $2\sin^2 A = rr - \cos 2A$: revenant à la seconde table du Corollaire IV; de l'équation $\sin 3A = 3s - 4s^3$, l'on déduit $4\sin^3 A = 3\sin A - \sin 3A$; enfin de la seconde table du Corollaire V, on tire $\cos 4A = 8s^4 - 8s^2 + 1$; d'où l'on déduira aisément $8\sin^4 A = \cos 4A - 4\cos 2A + 3$, en substituant à s^2 la valeur déja trouvée $2\sin^2 A = rr - \cos 2A$. Et ainsi des autres en suivant ce procédé, on formera aisément la table suivante.

$Sin\ A = sin\ A.$

$2\ Sin^2 A = r - cos\ 2A.$

$4\ Sin^3 A = 3\ sin\ A - sin\ 3A.$

$8\ Sin^4 A = 3 - 4\ cos\ 2A + cos\ 4A.$

$16\ Sin^5 A = 10\ sin\ A - 15\ sin\ 3A + sin\ 5A.$

$32\ Sin^6 A = 10 - 15\ cos\ 2A + 6\ cos\ 4A - cos\ 6A.$

$64\ Sin^7 A = 35\ sin\ A - 21\ sin\ 3A + 7\ sin\ 5A - sin\ 7A.$

$128\ Sin^8 A = 35 - 56\ cos\ 2A + 28\ cos\ 4A - 8\ cos\ 6A + cos\ 8A.$

$256\ Sin^9 A = 126\ sin\ A - 84\ sin\ 3A + 36\ sin\ 5A - 9\ sin\ 7A + sin\ 9A,$
&c.

Il eſt aiſé de remarquer la loi des coefficients de cette table; & d'abord on voit que les puiſſances impaires du ſinus de A ſont toutes exprimées par les ſinus d'arcs multiples du même arc, tandis que les puiſſances paires des ſinus de A ſont toutes exprimées en coſinus. La loi des coefficients eſt viſiblement celle des coefficients du binome élevé à une puiſſance quelconque; en obſervant que dans les puiſſances paires le nombre abſtrait qui n'eſt point multiplié par un coſinus de A, n'eſt que la moitié du coefficient que donne celui du même rang dans la puiſſance ſemblable du binome. Cela poſé, on voit qu'il faut néceſſairement deux formules générales pour exprimer ces ſuites de puiſſances.

H. *Premiere formule générale des puiſſances de ſin A pour n impair, en commençant par les derniers termes de la table.*

$$2^{n-1}\ sin.^n A = \pm\ sin.\ nA \mp n\ sin.\ \overline{n-2}.A \pm \frac{n\times n-1}{2.}\ sin.\ \overline{n-4}.A \mp \frac{\overline{n\times n-1}\times\overline{n-2}}{1.2.}\ sin.\ \overline{n-6}.A \pm$$
$$\&c. \ldots\ldots \pm \frac{n\times n-1 \ldots . n-2.\ \&c.}{1.2.3.\ \&c.}\ sin.\ A.$$

K. *Seconde formule générale pour les puiſſances de* ſin. A, n *étant un nombre pair quelconque.*

$$2^{n-1}\,\mathit{ſin}^{n}\,A = \pm\,\mathit{cof.}\,nA \mp n\,\mathit{cof.}\,\overline{n-2}.\,A \pm \frac{n\times n-1}{1.2.}\times\mathit{cof.}\,\overline{n-4}.\,A \mp \frac{n\times n-1\times n-2}{1.2.3.}\,\mathit{cof.}\,\overline{n-6}.\,A \ldots\ldots\ldots \mp \tfrac{1}{2}\left(\frac{n\times n-1\times n-2\ \&c.}{1.2.3.\ \&c.}\right)\times\mathit{cof.}\,0.A.$$

Chacune des deux formules précédentes a deux ſignes : n étant un nombre impair, on ſe ſervira du ſigne ſupériéur lorſque $n = 4m + 1$; m étant un nombre quelconque: il faudra prendre les ſignes inférieurs lorſque $n = 4m - 1$; m étant un nombre quelconque. Pareillement ſi n eſt pair, on ſe ſervira des ſignes ſupérieurs lorſque $n = 4m$, m étant un nombre quelconque ; & l'on prendra le ſigne inférieur pour $n = 2m$, m déſignant un nombre impair quelconque.

32. Pour trouver préſentement une formule ſemblable pour les puiſſances ſucceſſives du coſinus d'un angle, on ſe ſervira des deux premieres tables du cinquieme & quatrieme Corollaire, préciſément de la même maniere que nous nous ſommes ſervi des deux dernieres ; & l'on trouvera aiſément la table ſuivante.

$\mathit{Cof}^{1}\,A = \mathit{cof}\,A.$

$2\,\mathit{Cof}^{2}\,A = 1 + \mathit{cof}\,2A.$

$4\,\mathit{Cof}^{3}\,A = 3\,\mathit{cof}\,A + \mathit{cof}\,3A.$

$8\,\mathit{Cof}^{4}\,A = 3 + 4\,\mathit{cof}\,2A + \mathit{cof}\,4A.$

$16\,\mathit{Cof}^{5}\,A = 10\,\mathit{cof}\,A + 5\,\mathit{cof}\,3A + \mathit{cof}\,5A.$

$32\,\mathit{Cof}^{6}\,A = 10 + 15\,\mathit{cof}\,2A + 6\,\mathit{cof}\,4A + \mathit{cof}\,6A.$

$64\,\mathit{Cof}^{7}\,A = 35\,\mathit{cof}\,A + 21\,\mathit{cof}\,3A + 7\,\mathit{cof}\,5A + \mathit{cof}\,7A.$

&c.

Regardant le dernier terme de chacune de ces équations comme le premier, ou ce qui revient au même,

prenant toutes ces équations à rebours, on formera aiſément la formule générale ſuivante.

$$L.\ 2^{n-1}\ cof.^n A = cof.\ nA + \frac{n}{1}\ cof.\overline{n-2}.A +$$

$$\frac{n\times n-1}{1.\ 2.}\ cof.\overline{n-4}\times A + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.}\ cof.\overline{n-6}.A$$

$$\ldots\ldots\ldots + \frac{n\times n-1\times n-2\ \&c.}{1.\ 2.\ 3\ \&c.}\ cof.\overline{n-n}.\ A \text{ ou}$$

cof A ſelon que *n* eſt un nombre pair ou impair. C.Q.F.T.

SCHOLIE.

33. Quoique nous ayons déja réſolu l'inverſe du dernier Problême, néanmoins comme on peut encore en donner d'autres ſolutions au moyen des tables des n°. 28 & 29, en cherchant la loi des termes à commencer par les derniers termes, nous ajouterons encore ici ces ſolutions.

PROBLEME IV.

35. *Trouver une formule générale pour transformer un ſinus ou coſinus du multiple d'un arc quelconque* A, *en puiſſances des ſinus & coſinus de l'arc ſimple.*

SOLUTION.

Ce Problême a pluſieurs parties; le ſinus d'un arc multiple étant donné peut être exprimé en ſinus ou coſinus, ſelon qu'on ſe ſert de la premiere ou de la ſeconde table du n°. 28. De plus il eſt viſible que dans l'un & dans l'autre cas la formule doit avoir différentes expreſſions ſuivant que l'on commence la ſuite par le premier ou le dernier terme; de plus encore on voit qu'en commençant par le dernier terme, les formules générales ſont encore différentes, ſuivant que le nombre *n* eſt pair ou impair. Cela poſé; la formule A du n°. 28 eſt celle qui réſout le problême en prenant l'expreſſion des ſinus multiples en puiſſance du coſinus de l'arc ſimple, & com-

mençant la ſuite par le premier terme, n étant un nombre quelconque pair ou impair. Les formules B & C du même num. donnent les valeurs générales des ſinus multiples en puiſſances du ſinus de l'arc ſimple; B pour n impair, & C pour n pair quelconque; en commençant chaque ſuite par le premier terme. Il nous reſte à chercher les formules générales qui ſatisfont au même Problême en commençant chaque ſuite par les plus hautes puiſſances du ſinus de l'arc ſimple; & nous aurons viſiblement deux formules générales, ſuivant que n ſera un nombre pair ou impair.

M. *Formule pour réduire un ſinus multiple en fonctions du ſinus de l'arc ſimple*, n *étant un nombre pair.*

$$\text{Sin. } nA = \left(\overline{+}\, 2^{n-1}\, s^{n-1} \underline{+} \frac{\overline{n-2}}{1} \times 2^{n-3}\, s^{n-3} \overline{+} \frac{\overline{n-3} \times \overline{n-4}}{1.2} \times 2^{n-5}\, s^{n-5} \underline{+} \frac{\overline{n-4} \times \overline{n-5} \times \overline{n-6}}{1.2.3} 2^{n-7}\, s^{n-7} \ldots\ldots \overline{+}\, \&c. \ldots + n\, s\right) \sqrt{rr - ss}.$$

N. *Formule pour réduire un ſinus multiple en fonctions du ſinus de l'arc ſimple*, n *étant un nombre impair quelconque.*

$$\text{Sin. } nA = \overline{+}\, 2^{n-1}\, s^{n} \underline{+} \frac{n}{1} 2^{n-3}\, s^{n-2} \overline{+} \frac{n \times \overline{n-3}}{1.2} 2^{n-5}\, s^{n-4} \underline{+} \frac{n \times \overline{n-4} \times \overline{n-5}}{1.2.3} 2^{n-7}\, s^{n-6} \overline{+} \frac{n \times n-5 \times n-6 \times n-7}{1.2.3.4} 2^{n-9}\, s^{n-8} \underline{+} \frac{n \times \overline{n-6} \times \overline{n-7} \times \overline{n-8} \times \overline{n-9}}{1.2.3.4.5} 2^{n-11}\, s^{n-10}$$

&c.

O. *Formule pour réduire un cosinus multiple en fonctions du cosinus de l'arc simple*, n *étant un nombre pair quelconque.*

$$\pm \text{Cos. } nA = r^n - \frac{n^2}{1.2} \times r^{n-2} \cos^2 A + \frac{n^2}{1.2} \times \frac{n^2-4}{3.4} r^{n-4} \cos^4 A - \frac{n^2}{1.2} \times \frac{n^2-4}{3.4} \times \frac{n^2-16}{5.6} r^{n-6} \cos^6 A + \frac{n^2}{1.2} \times \frac{n^2-4}{3.4} \times \frac{n^2-16}{5.6} \times \frac{n^2-36}{6.7} r^{n-8} \cos^8 A - \&c.$$

P. *Formule pour* n *supposé un nombre impair quelconque.*

$$\pm \text{Cos. } nA = nr^{n-1} \cos. A - n \frac{n^2-1}{2.3} r^{n-3} \cos^3 A + \frac{n \times n^2-1}{2.3} \times \frac{n^2-9}{4.5} r^{n-5} \cos^5 A - \frac{n \times n^2-1 \times n^2-9 \times n^2-25}{1.2.3 \quad 4.5 \quad 6.7} r^{n-7} \cos^7 A + \frac{n \times n^2-1 \times n^2-9 \times n^2-25 \times n^2-49}{1.2.3 \quad 4.5 \quad 6.7 \quad 8.9} r^{n-9} \cos^9 A - \&c.$$

Ces deux dernieres formules se déduisent aisément de la premiere table du Corollaire V (n°. 29), en observant la loi des coefficients pour les termes de rang pair & de rang impair. Dans la premiere formule M des sinus, on prendra le signe supérieur lorsque le nombre est quelqu'un des nombres pairs désignés par $4m$, m étant un nombre quelconque ; le signe inférieur a lieu pour tous les nombres de la forme $2m$ en supposant que m est un nombre impair quelconque.

Pareillement dans la seconde formule N, le signe supérieur doit avoir lieu pour les les nombres impairs de la forme $4m - 1$, & le signe inférieur pour ceux de la forme $4m + 1$, m étant un nombre quelconque. On verra de même que dans la troisieme suite O, le cosinus est positif ou négatif suivant que l'on a $n = 4m$ ou $n = 2m$, m étant un nombre quelconque dans le premier cas & un

nombre impair dans le ſecond. Enfin lorſque n eſt impair, le coſinus eſt poſitif ou négatif ſelon que $n = 4m + 1$ ou $4m - 1$.

De l'uſage des Facteurs imaginaires dans la théorie des Sinus & Coſinus.

36. Toutes les ſuites que nous venons de donner, ont été déduites immédiatement des deux Problêmes ſur les ſinus & coſinus de la ſomme ou de la différence de deux arcs quelconques, que nous avons ſuppoſés égaux ; mais il y auroit encore bien d'autres méthodes de découvrir de nouvelles ſuites ; nous ajouterons ſeulement ici celle où l'on employe des facteurs imaginaires, non que les expreſſions abſurdes en elles-mêmes ſoient préférables à d'autres, mais parce qu'on peut quelquefois les employer heureuſement pour abréger les calculs, & découvrir facilement, par leur moyen, des vérités intéreſſantes.

PROBLEME V.

37. *Trouver les Facteurs de la ſomme de deux quarrés tels que* aa & bb, *ou ce qui revient au même, découvrir comment il faut combiner* a & b *par multiplication, pour que le produit ſoit* aa + bb.

SOLUTION.

Soient A & B les indéterminées qui doivent affecter les racines a & b des quarrés, pour que le produit ſoit $aa + bb$; & ſuppoſons que les facteurs ſoient $a + Ab$, & $aB + b$. Faiſant la multiplication de ces deux facteurs, on trouve que le produit $aaB + abAB + ab + Abb = aa + bb$; comparant les termes de cette équation, je vois qu'en ſuppoſant $aaB = aa$ on aura $B = 1$, & qu'en ſuppoſant $Abb = bb$ on aura auſſi $A = 1$; ce qui m'apprend d'abord que ſi les quantités A & B ſont poſſibles, on aura $A = B$, ce qui donne $AB = AA = BB$;

préſentement à cauſe que dans la ſomme $aa + bb$ le terme ab manque, il faut donc que l'on ait $ab + ab\mathrm{AB} = 0$ ou $ab + \mathrm{AA}ab = 0$ ou $ab + \mathrm{BB}ab = 0$; c'eſt-à-dire, qu'on auroit $\mathrm{AA} + 1 = 0$ ou $\mathrm{BB} + 1 = 0$; ce qui eſt impoſſible; puiſque nous avons vu que AA ou BB $= 1$; donc les facteurs ne peuvent pas avoir la forme ſuppoſée; donc la quantité propoſée ne peut pas être décompoſée en facteurs, ou, ce qui revient au même, n'eſt pas un produit des quantités a & b, de quelque maniere qu'on veuille les combiner. Cependant ſi on veut en quelque façon réſoudre l'équation $\mathrm{AA} + 1 = 0$, malgré l'abſurdité qu'elle emporte, comme on vient de le voir; on aura $\mathrm{AA} = -1$; & tirant les racines $\mathrm{A} = \pm\sqrt{-1}$. On trouvera de même $\mathrm{B} = \pm\sqrt{-1}$. Cette expreſſion que les Géometres ont nommée imaginaire, n'eſt donc pas une quantité réelle, mais un ſigne d'une ſuppoſition abſurde dans laquelle on regarde comme produit de deux quantités ce qui n'en eſt pas un.

Ce ſigne pouvant être d'uſage, rien n'empêche de l'employer dans le calcul, & alors les facteurs imaginaires de $aa + bb$ ſeront $a + b\sqrt{-1}$) & $a - b\sqrt{-1}$ ou $b + a\sqrt{-1}$ & $b - a\sqrt{-1}$, ou $-a + b\sqrt{-1}$ $-a - b\sqrt{-1}$. *C. Q. F. T.*

SCHOLIE.

38. Ayant découvert que $aa + bb$ ne peut pas être un produit des quantités a & b, on pourroit demander s'il n'y a pas quelque moyen de trouver cette même ſomme de quarrés par une autre combinaiſon des quantités $a + b$ & $a - b$. Dans cette vue, j'éleve chacune de ces quantités au quarré, & je trouve $aa + 2ab + bb$, $aa - 2ab + bb$. Je vois auſſi qu'en ajoutant ces quarrés, & prenant leur demi-ſomme, on aura la ſomme $aa + bb$; donc il eſt clair que cette ſomme de quarrés n'eſt pas un produit des quantités $a + b$ & $a - b$, mais uniquement la demi-ſomme des quarrés de ces mêmes quantités.

On pourroit pouſſer cette théorie beaucoup plus loin, mais j'ai cru que le peu que j'en ai dit ici, étoit néceſſaire pour fixer l'idée qu'on doit ſe former des imaginaires qui n'ont été bien préſentées dans aucun élément, du moins de ceux que je connois. De plus cette théorie me paroît également néceſſaire, depuis qu'on a introduit ces expreſſions dans les ſinus & coſinus. Enfin on ne peut pas avoir des notions préciſes des rapports ſinguliers qui ſe trouvent entre les courbes du genre hyperbolique & celles du genre elliptique, & pareillement entre les logarithmes & les arcs de cercle, ſans y faire l'application de tout ce que nous venons de dire ici.

COROLLAIRE I.

39. Il ſuit delà que ſi l'on veut trouver les facteurs imaginaires de $\mathit{ſin}^2 A + \mathit{coſ}^2 A = RR$, on aura $(\mathit{coſ} A + \mathit{ſin} A \sqrt{-1}) \times (\mathit{coſ} A - \mathit{ſin} A \sqrt{-1}) = RR$. De même ſi l'on ſuppoſe un autre arc B; & qu'on veuille faire uſage des facteurs imaginaires, on trouvera que

$(\mathit{coſ} A + \mathit{ſin} A \sqrt{-1}) \times (\mathit{coſ} B + \mathit{ſin} B \sqrt{-1}) = \mathit{coſ} A \times \mathit{coſ} B - \mathit{ſin} A \times \mathit{ſin} B + \sqrt{-1} \times (\mathit{coſ} A \times \mathit{ſin} B + \mathit{ſin} A \times \mathit{ſin} B) = \mathit{coſ}(A+B) + \sqrt{-1}\, \mathit{ſin}(A+B)$. (art. 23 & 24).

De même $(\mathit{coſ} A - \mathit{ſin} A \sqrt{-1}) \times (\mathit{coſ} B - \mathit{ſin} B \sqrt{-1}) = \mathit{coſ}(A+B) - \sqrt{-1}\, \mathit{ſin}(A+B)$. On trouveroit par un calcul ſemblable que $(\mathit{coſ} A \pm \sqrt{-1}\, \mathit{ſin} A) \times (\mathit{coſ} B \pm \sqrt{-1}\, \mathit{ſin} B) \times \mathit{coſ} C \pm \sqrt{-1}\, \mathit{ſin} C) = \mathit{coſ}(A+B+C) \pm \sqrt{-1}\, \mathit{ſin}(A+B+C)$.

COROLLAIRE II.

40. Donc ſi l'on prend deux facteurs, & qu'on ſuppoſe les arcs A & B égaux entr'eux, on aura $(\mathit{coſ} A \pm \mathit{ſin}$

$A\sqrt{-1})^2 = cof\,2A \pm fin\,2A\sqrt{-1}$. On trouvera de même que $(cof A \pm fin A\sqrt{-1})^3 = cof 3A \pm fin 3A\sqrt{-1}$; & par analogie l'on en conclura généralement que $(cof A \pm fin A\sqrt{-1})^n = cof nA \pm fin nA\sqrt{-1}$.

COROLLAIRE III.

41. De la derniere équation l'on tire $fin\,nA\sqrt{-1} = (cof A + fin A\sqrt{-1})^n - cof nA$. Et à cauſe du ſigne — on aura encore $fin\,nA\sqrt{-1} = cof nA - (cof A - fin A\sqrt{-1})^n$. Ajoutant ces deux valeurs & diviſant par $2\sqrt{-1}$, on trouvera l'expreſſion ſuivante pour le ſinus d'un arc multiple.

$$Sin.\,nA = \frac{(cof A + fin A\sqrt{-1})^n - (cof A - fin A\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}.$$

On trouveroit de même que

$$Cof.\,nA = \frac{(cof A + fin A\sqrt{-1})^n + (cof A - fin A\sqrt{-1})^n}{2}$$

COROLLAIRE IV.

42. Si l'on éleve chacun de ces binomes à la puiſſance n par la formule générale, on trouvera que tous les termes affectés d'imaginaires ſe détruiſent, & l'on aura deux ſuites générales, dont l'une exprimera les ſinus & l'autre les coſinus d'arcs multiples.

Q. *Premiere formule.*

$$Sin.\,nA = n.\,cof^{n-1} A \times fin\,A - \frac{n \times n-1 \times n-2}{1.\,2.\,3} cof^{n-3} A\,fin^3 A + \frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3 \times n-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} cof^{n-5} A\,fin^5 A,$$

&c.

R. *Seconde formule.*

$$\text{Cof. } nA = \text{cof.}^n A - \frac{n \times n-1}{1.2} \text{cof.}^{n-2} A \, \text{fin}^2 A + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} \text{cof.}^{n-4} A \, \text{fin}^4 A - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6} \text{cof.}^{n-6} A \, \text{fin}^6 A + \&c.$$

COROLLAIRE V.

43. Si l'on ſuppoſe que l'arc A ſoit infiniment-petit, on aura *fin* A = A & *cof* A = *r* ou 1. Pour que l'arc *n*A devienne d'une grandeur finie, il faudra que *n* devienne infiniment-grand; ce qui réduira les produits de $n \times \overline{n-1}$; $n \times \overline{n-2}$; &c. aux puiſſances n^2, n^3 &c. Si l'on fait l'arc *n*A = *c* à cauſe que *fin* A = A, dans notre ſuppoſition $A = \frac{c}{n}$; on aura $\text{fin}^2 A = \frac{c^2}{n^2}$ &c. ainſi des autres puiſſances de *fin* A, tandis que toutes les puiſſances de *cof* A ſeront égales à l'unité; ainſi l'on aura de nouvelles formules au moyen deſquelles il ſera facile d'exprimer le ſinus ou coſinus en parties de l'arc, ou en décimales du rayon.

S. *Premiere formule.*

$$\text{Sin. } C = c - \frac{c^3}{1.2.3} + \frac{c^5}{1.2.3.4.5} - \frac{c^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{c^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} - \&c.$$

T. *Seconde formule.*

$$\text{Cof. } C = 1 - \frac{c^2}{1.2} + \frac{c^4}{1.2.3.4} - \frac{c^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{c^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \&c.$$

On voit que ces formules donneront le ſinus & coſinus

d'autant plus rapidement qu'elles ſeront plus convergentes, ce qui arrivera ſi l'arc déſigné par c eſt d'un petit nombre de degrés. Il y a encore pluſieurs ſuites ſemblables. On ſe ſert de ces ſuites pour calculer les ſinus & coſinus naturels d'un arc quelconque. (Voyez l'expoſition du calcul aſtronomique de M. de la Lande, page 21).

PROBLEME VI.

44. *Trouver la tangente de la ſomme ou de la différence de deux arcs donnés* A & B.

SOLUTION.

Soient AM & AN (*fig. 6.*) les arcs donnés dont AG & AL ſont les tangentes, que nous déſignerons par t & θ: il eſt viſible que la ligne NT perpendiculaire à l'extrémité du rayon CN ſera la tangente de la ſomme de ces deux arcs; nous la déſignerons par T; & ces ſuppoſitions nous ferons trouver la tangente de la ſomme de deux arcs quelconques A & B. Pour avoir celle de la différence, nous regarderons l'arc MN comme A, & l'arc AM comme B; AL ſera la tangente de la différence des arcs A & B; nous la nommerons τ. Soient encore abaiſſées les perpendiculaires AQ, GP au rayon CN. Cela poſé, à cauſe des triangles ſemblables CRN, CAQ, l'on aura CR : RN :: CA : AQ ou $\sqrt{rr+\theta\theta} : \theta :: r : \frac{r\theta}{\sqrt{rr+\theta\theta}}$; de même à cauſe des triangles ſemblables AQL, GPL, on aura AL : AQ :: GL : GP ou $\theta : \frac{r\theta}{\sqrt{rr+\theta\theta}} :: t+\theta : \frac{\overline{t+\theta}\times r}{\sqrt{rr+\theta\theta}}$. De plus à cauſe que CL : AL :: AL : QL, on aura $QL = \frac{\theta\theta}{\sqrt{rr+\theta\theta}}$; il eſt encore évident, à cauſe des triangles ſemblables AQL, GPL que AL : QL :: GL : PL ou que $\theta : \frac{\theta\theta}{\sqrt{rr+\theta\theta}} ::$

$t+\theta : \frac{\overline{t+\theta \times \theta}}{\sqrt{rr+\theta\theta}}$; donc CP ou CL — PL $= \frac{rr-\theta t}{\sqrt{rr+\theta\theta}}$.

Au moyen des expreſſions que nous venons de trouver, il eſt aiſé d'avoir celle de la tangente NT ; car à cauſe des triangles ſemblables CPG, CNT on aura CP : PG : : CN : NT & analytiquement $\frac{rr-\theta t}{\sqrt{rr+\theta\theta}} \cdot \frac{r \times \overline{\theta+t}}{\sqrt{rr+\theta\theta}} : : r : \frac{r \times \overline{\theta+t}}{rr-\theta t} = tang\ (A+B)$ d'où l'on tire en faiſant le rayon égal à l'unité $tang\ (A+B) = \frac{tang\ A + tang\ B}{1 - tang\ A \times tang\ B}$. *C. Q. F.* 1°, *T.*

2°. Pour avoir la tangente de la différence de deux angles, on ſe ſervira de l'équation que nous venons de trouver $T = \frac{rr \times \overline{\theta+t}}{rr-\theta t}$; & traitant l'une des tangentes θ ou t comme inconnue, on aura la tangente de la différence de deux arcs. Les regles ordinaires nous donnent t ou $\tau = \frac{rr \times (T-\theta)}{rr+\theta T}$; donc en faiſant le rayon égal à l'unité on aura τ ou $tang\ (A-B) = \frac{tang\ A - tang\ B}{1 + tang\ A \times tang\ B}$. *C. Q. F.* 2°, *T.*

SCHOLIE.

45. On auroit pu trouver ce même réſultat ſans aucune conſtruction géométrique par le moyen des formules déja données, comme il ſuit. Soit S la ſécante de A, & s celle de B. On aura par les propriétés connues des ſinus, coſinus, tangentes & ſécantes, $ſin\ A = \frac{T\,r}{S}$ & $coſ\ A = \frac{rr}{S}$, & de même $ſin\ B = \frac{t\,r}{s}$ & $coſ\ B = \frac{r\,r}{s}$; ſubſtituant ces valeurs dans celles de $ſin\ (A \pm B)$ on aura $ſin\ (A+B) = \frac{rr \times \overline{T+t}}{Ss}$ & $ſin\ (A-B) = \frac{r \times (rr - Tt)}{Ss}$; on trouveroit de même $coſ\ (A+B) = \frac{rr \times \overline{T-t}}{Ss}$ & $coſ\ (A-B) = \frac{r \times (rr+Tt)}{Ss}$; donc à cauſe que $tang = \frac{ſin}{coſ}$

on trouvera comme ci-deſſus *tang* (A + B) $= \frac{r \times \overline{T+t}}{rr - Tt}$ & *tang* (A — B) $= \frac{r \times (T-t)}{rr+Tt}$.

COROLLAIRE I.

46. *Tang* (A+B) × *tang* (A—B) $= \frac{(tang^2 A - tang^2 B) \times r^2}{rr - tang^2 A \times tang^2 B}$ $= \frac{(tang\, A + tang\, B) \times (tang\, A - tang\, B) r^2}{(r^2 + tang\, A \times tang\, B) \times (r^2 - tang\, A \times tang\, B)}$.

COROLLAIRE II.

47. Si l'un des angles eſt de 45° on aura *tang* $A + 45° = \frac{1 + tang\, A \times r}{1 - tang\, A} = \frac{rr}{tang\,(45° - A)}$. Car on trouvera ſur le champ que le rayon eſt moyen proportionnel entre *tang* (45° + A) & *tang* (45° — A). D'où il ſuit que ſi l'on a calculé les tangentes des angles au-deſſous de 45°, on aura toutes les tangentes des angles au-deſſus de 45° par une ſimple diviſion. Et ſi l'on a calculé les logarithmes des mêmes tangentes, on aura pareillement les logarithmes des tangentes des arcs au-deſſus de 45°, en ôtant le logarithme de la tangente trouvée du double logarithme du ſinus total. Ce Corollaire fait voir comment on a pu conſtruire aiſément les tables des tangentes & de leurs logarithmes.

COROLLAIRE III.

48. Tant que les angles A & B ſeront tels que leur ſomme ſoit moindre que 90°, l'expreſſion de *tang* (A + B) ſera poſitive. Si l'on ſuppoſe que *tang* A × *tang* B = *rr*, ce qui arrive, lorſque les angles ſont compléments l'un de l'autre, le dénominateur devenant zéro nous avertit que cette tangente n'a plus d'expreſſion finie. Enfin lorſque *tang* A × *tang* B eſt plus grand que *rr*, ce qui a lieu, lorſque les deux angles font enſemble un angle obtus, l'expreſſion de la tangente devient né-

gative; ce qui avertit que cette tangente doit se prendre dans un sens opposé.

COROLLAIRE IV.

49. Si l'on suppose que les arcs A & B soient égaux, & qu'on imagine une suite d'arcs A, 2A, 3A, 4A, &c, multiples du premier, il sera facile d'en trouver les tangentes au moyen de la formule $tang\ (A+B) = \frac{tang\ A + tang\ B}{rr - tang\ A.\ tang\ B}$, en regardant toujours la derniere tangente trouvée comme *tang* A, & faisant toujours B = l'arc simple A, dont on cherche les multiples; suivant ce procédé on formera aisément la table suivante.

$$Tang\ \ A = T.$$

$$Tang\ 2A = \frac{2rT}{rr - TT}.$$

$$Tang\ 3A = \frac{3rrT - T^3}{r^2 - 3TT}.$$

$$Tang\ 4A = \frac{4r^4T - 4r^2T^3}{r^4 - 6r^2T^2 + T^4}.$$

$$Tang\ 5A = \frac{5r^4T - 10r^2T^3 + T^5}{r^4 - 10r^2T^2 + 5T^4}.$$

D'où il est aisé de déduire laformule générale suivante, en observant la loi des coefficients pour un arc multiple quelconque, & faisant le rayon égal à l'unité.

$$Tang.\ nA = \frac{nT - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}T^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}T^5 - \&c.}{1 - \frac{n.n-1}{1.2}T^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}T^4 - \&c.}$$

Pour abréger l'expression de cette formule, ainsi que toutes celles que nous avons données jusqu'ici, on peut faire attention que chaque coefficient renferme toujours celui du terme qui le précéde; ainsi représentant ces coefficients par les lettres indéterminées *A*, *B*, *C*, *D*, &c.

pour

pour le numérateur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c; pour le dénominateur la formule précédente pourra s'exprimer comme on le voit ici.

$$\text{Tang.}\,nA = \frac{nT - A.\frac{n-1.n-2}{1.2.3}T^3 + B.\frac{n-3.n-4}{4.5}T^5 - C\times\frac{n-5.n-6}{6.7}T^7 + D\times\frac{n-7.n-8}{8.9}T^9 - \&c.}{1T^0 - \frac{n.n-1}{1.2}T^2 + \alpha\times\frac{n-2.n-3}{3.4}T^4 - \beta.\frac{n-4.n-5}{5.6}T^6 + \gamma.\frac{n-6.n-7}{8.9}T^8 - \&c.}$$

50. Si l'on veut exprimer les tangentes des arcs multiples en commençant par le plus haut terme ou la plus haute puiſſance de T, on verra aiſément qu'il faut deux ſuites ou formules générales, l'une pour les nombres impairs & l'autre pour les nombres pairs. De plus à cauſe que les plus hautes puiſſances impaires ſont alternativement poſitives & négatives, on aura les deux ſignes $\pm$ devant la tangente multiple.

Premiere formule pour n *impair.*

$$\pm\text{Tang.}\,nA = \frac{T^n - \frac{n.n-1}{1.2}T^{n-2} + A.\frac{n-2.n-3}{3.4}T^{n-4} - B.\frac{n-4.n-5}{5.6}T^{n-6}\ \&c.}{nT^{n-1} - \alpha\frac{n-1.n-2}{1.2.3}T^{n-3} + \beta\frac{n-3.n-4}{4.5}T^{n-5} - \gamma\frac{n-5.n-6}{6.7}T^{n-7}\ \&c.}$$

Seconde formule pour n, *ſuppoſé un nombre pair quelconque.*

$$\pm\text{Tang.}\,nA = \frac{nT^{n-1} - A.\frac{n-1.n-2}{2.3}T^{n-3} + B.\frac{n-3.n-4}{4.5}T^{n-5} - C\frac{n-5.n-6}{6.7}T^{n-7}\ \&c.}{T^n - \frac{n.n-1}{1.2}T^{n-2} + \alpha\frac{n-2.n-3}{3.4}T^{n-4} - \beta\frac{n-4.n-5}{5.6}T^{n-6}\ \&c.}$$

51. Si l'on veut faire entrer les cotangentes dans l'expreſſion des tangentes d'arcs multiples, la table précédente ſe changera facilement en celle qui ſuit, en mettant cotangente à la place de $\frac{RR}{T}$. D'où il ſera également facile de former une autre table pour les cotangentes des arcs multiples.

$$\text{Cot. } A = \cot A.$$

$$\text{Cot. } 2A = \frac{\cot A - \text{tang } A}{2}.$$

$$\text{Cot. } 3A = \frac{r^2 \cot A - 3r^2 \text{ tang } A}{3r^2 - \text{tang}^2 A}.$$

$$\text{Cot. } 4A = \frac{r^2 \cot A - 6r^2 \text{ tang } A + \text{tang}^3 A}{4r^2 - 4\text{tang}^2 A}.$$

$$\text{Cot. } 5A = \frac{r^2 \cot A - 10r^2 \text{ tang } A + 5\text{ tang}^3 A}{5r^2 - 10\text{ tang}^2 A + \text{tang}^4 A}.$$

$$\text{Cot. } 6A = \frac{r^4 \cot A - 15r^4 \text{ tang } A + 15r^2 \text{tang}^3 A - \text{tang}^5 A}{6r^4 - 20r^2 \text{ tang}^2 A + 6\text{ tang}^4 A}.$$

Et en général on aura :

$$\text{Cot. } nA = \frac{\cot A - \frac{n.n-1}{1.2}\text{tang}^2 A + A\frac{n-2.n-3}{3.4}\text{tang}^4 A - B\frac{n-4.n-5}{5.6}\text{tang}^6 A}{n. - \alpha\frac{n-1.n-2}{2.3}\text{tang } A + \beta\frac{n-3.n-4}{4.5}\text{tang}^3 A - \gamma\frac{n-5.n-6}{6.7}\text{tang}^5 A} \text{ \&c.}$$

en faiſant le rayon égal à l'unité ; parce qu'en faiſant paroître le rayon il eût fallu deux ſuites pour exprimer les cotangentes d'arcs multiples, ſuivant que n ſeroit un nombre pair ou impair.

52. Il eſt encore viſible que l'on pourroit appliquer aux cotangentes d'arcs multiples les deux dernieres formules générales, en commençant par les termes de la plus haute puiſſance, puiſque les coefficients ſont toujours les mêmes. On peut encore ſe ſervir des formules précédentes, pour transformer des puiſſances de tangentes en tangentes d'arcs ſimples & d'arcs multiples. Ainſi l'on formera aiſément la table ſuivante par de ſimples ſubſtitutions ; en ſuppoſant T', T'' T''' déſignant les tangentes des arcs multiples. Que

$$T^1 = T,$$

$$T^2 = \frac{T'' - 2T}{T''}.$$

$$T^3 = \frac{3T''T + 6T'''T + 2T'''T''}{T''}.$$

$$T^4 = \frac{-12TT'' - 24TT''' + 8T''T''' - T^{iv} - 12T''T^{iv} + 6T'''T^{iv}}{T''T^{iv}}.$$

Il en ſeroit de même des autres puiſſances.

COROLLAIRE.

53. Il ſuit encore delà que pour avoir toutes les tangentes depuis zéro de degrés juſqu'à 90°, il ſuffit de les trouver juſqu'à 30°. Car ſi l'on nomme B un arc de cercle moindre que 30°, & que l'on ait $A = 30° - B$. On aura auſſi $2A = 60° - 2B$. & $cot\ 2A = tang\ (30° + 2B)$. Donc à cauſe de la formule $cot\ 2A = \frac{cot\ A - tang\ A}{2}$ on aura $tang\ (30° + 2B) = \frac{cot\ (30° - B) - tang\ (30° - B)}{2}$; d'où l'on voit comment il a été facile de diminuer ſingulièrement le calcul des tables des tangentes, comme nous avons déja fait voir ſur les ſinus & coſinus.

PREMIER SCHOLIE.

54. Non-ſeulement on peut trouver par les formules que nous avons donnés dans les ſuites générales précédentes, les ſinus, coſinus, tangentes & cotangentes d'arcs multiples; mais on peut encore en faire uſage pour trouver les *ſinus*; *coſinus* &c. d'un angle ou d'un arc ſous-multiple dans tel rapport que l'on voudra; mais alors on aura des équations de différents degrés à réſoudre, ce qui peut apporter de très-grands avantages dans la réſolution de ces équations par le cercle; puiſque les tables des ſinus étant toutes dreſſées, contiennent auſſi les racines de ces équations: par exemple, ſi l'on veut diviſer un arc en trois ou en cinq parties égales par le moyen de ſon ſinus ou de ſon coſinus, on n'aura qu'à faire *ſin.* $nA = a$, & *coſ.* $nA = b$; enſuite on n'aura qu'à traiter s & c comme inconnues en les déſignant par x & y, les formules B & D donneront les équations ſuivantes. $4x^3 - 3r^2x + ar^2 = 0$ & $4y^3 - 3r^2y - br^2b = 0$. De même ſi l'on nomme c la tangente nA, z la tangente de l'arc ſimple déſigné par A, & qu'on faſſe $n = 3$; la formule de l'article 49, donnera l'équation ſuivante $z^3 - 3cz^2 - 3r^2z + rc^2 = 0$; qui toutes, comme on le voit, ſont du troiſieme

degré, ce qui fait voir que le problême de la triſection de l'angle eſt toujours ſolide de quelque maniere que l'on s'y prenne pour le réſoudre : on tombera toujours dans des équations finies, tant que n ſera un nombre entier ou commenſurable. Pareillement ſi l'on cherchoit par les cotangentes en faiſant $cot.\, nA = d$ & $cot\, A = u$, on trouveroit encore cette équation, $u^3 + 3u^2d + dru - 3r^3 = 0$ qui ne differe de la derniere que par les ſignes.

SECOND SCHOLIE.

55. Pour éviter la confuſion, nous avons ſupprimé dans la plupart des formules précédentes les variations dont elles ſont ſuſceptibles, eu égard aux changements des ſignes ; mais au moyen des réflexions ſuivantes on ſera toujours à portée de connoître ce qu'ils indiquent, lorſqu'ils pourront avoir lieu. Soit donc l'arc AM (*fig.* 7) que nous ſuppoſons moindre que 90° ; ſi l'on regarde comme poſitifs ſon ſinus MP, ſon coſinus CP, ſa tangente AT & ſa cotangente BR ; on verra que le ſinus & la tangente de l'angle obtus ACm ou de l'arc Am ſeront encore poſitifs, parce qu'ils conſervent la même ſituation à l'égard du diametre AD ; mais le coſinus Cp & la cotangente Br deviennent négatifs, parce qu'ayant la même origine ils s'étendent dans des directions oppoſées à celles qu'avoient ces mêmes lignes, lorſqu'elles étoient rapportées à l'angle aigu. Si l'arc AM devient $Am\mu$, le ſinus, la tangente, le coſinus & la cotangente deviennent tous négatifs, tant que cet arc eſt plus grand que 180° & moindre que 270°. Enfin s'ils paſſent les trois quarts du cercle, on verra aiſément que le ſinus & la tangente deviennent négatifs, tandis que le coſinus & la cotangente redeviennent poſitifs. Comme dans les calculs trigonométriques on n'employe jamais que des angles droits obtus ou aigus ; toutes les conſidérations des ſignes ſe réduiſent à examiner dans quel cas les formules dont on fait

uſage, indiquent un angle obtus ou aigus. D'après nos ſuppoſitions ſi l'on trouve que l'expreſſion d'un coſinus ou d'une cotangente devienne négative, cela indique que l'angle auquel ces lignes appartiennent, eſt obtus.

Préparation aux Théorêmes ſuivants.

56. Soit PE (*fig.* 8) l'arc que nous avons déſigné par A & PB celui que nous avons nommé B. Du point B ſoient tirées les lignes BK & BH reſpectivement perpendiculaires aux lignes DE & CP. De plus ayant mené les lignes BE & BO aux extrémités de la corde EO ſoient encore abaiſſées ſur ces lignes les perpendiculaires CT, CR terminées à la tangente RBT ; cette conſtruction bien entendue on verra 1° que l'arc BO $=$ A $+$ B. 2° que BE $=$ A $-$ B. 3° que KO $=$ *ſin* A $+$ *ſin* B; 4° que KE $=$ *ſin* A $-$ *ſin* B. 5° que KM $=$ *coſ* B $+$ *coſ* A, & que 6° KB $=$ *coſ* B $-$ *coſ* A. 7° que BT $=$ *tang* $(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$; 8° que BR $=$ *tang* $(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$. 9° que AL $=$ *ſin* $(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$ & CL $=$ *coſ* $(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$. 10° que BF $=$ *ſin* $(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$ & CF $=$ *coſ* $(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$. 11°. que OM $=$ 2CF $=$ 2*coſ* $(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$. Car l'arc MO $=$ MN $+$ NO; mais NO $=$ 180° $-$ A & MN $=$ B. Donc $\frac{MO}{2}$ $=$ *ſin* $(90°-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$, donc MO $=$ 2*coſ* $(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$. 12° on fera voir de même que ME $=$ 2CL $=$ 2*coſ* $(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$. Cela poſé, les Théorêmes ſuivants n'auront aucune difficulté.

THÉOREME VII.

57. *Suppoſant toutes choſes comme dans la conſtruction précédente ; je dis que l'on aura* 1° *ſin* A $+$ *ſin* B $=$ 2*ſin* $(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\times$ *coſ* $(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$. 2° que *ſin* A $-$ *ſin* B $=$ 2*coſ* $(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\times$ *ſin* $(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$.

DÉMONSTRATION.

Les triangles rectangles MKO, CLA ſont évidemment ſemblables à cauſe que l'angle en M du premier eſt

égal à l'angle en C du ſecond, on aura donc la proportion OK : OM : : AL : CA; ou en ſubſtituant à ces lignes leurs expreſſions en ſinus & coſinus ; $\mathit{ſin}\ A + \mathit{ſin}\ B : 2\mathit{coſ}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) : : \mathit{ſin}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : R$, d'où l'on tire la premiere partie du Théorême, en faiſant le rayon égal à l'unité. *C*, Q, *F*1°, *D*.

2°. A cauſe des triangles ſemblables EKB, CLA on aura encore EK : EB : : CL : CA ou $\mathit{ſin}\ A - \mathit{ſin}\ B : 2\mathit{ſin}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) : : \mathit{coſ}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : R$ d'où l'on tire la ſeconde partie du Théorême. *C*. Q. *F*. 2°, *D*.

THÉOREME VIII.

58. *Je dis de plus que l'on aura encore les deux équations ſuivantes.* 1°. $\mathit{Coſ}\ A + \mathit{coſ}\ B = 2\mathit{coſ}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \mathit{coſ}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. 2°. $\mathit{coſ}\ B - \mathit{coſ}\ A = 2\mathit{ſin}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \mathit{ſin}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

DÉMONSTRATION.

Les mêmes triangles ſemblables MKO, CLA, EKB donnent encore les deux analogies ſuivantes MK : MO : : CL : CA ; & BK : BE : : AL : CA ; dans leſquelles ſubſtituant les valeurs de chaque terme ou trouvera $\mathit{coſ}\ A + \mathit{coſ}\ B : 2\mathit{coſ}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) : : \mathit{coſ}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : R$; 2° $\mathit{coſ}\ B - \mathit{coſ}\ A : 2\mathit{coſ}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : : \mathit{ſin}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : R$; d'où l'on tire ſur le champ les deux équations qu'il falloit démontrer. *C*. *Q*. *F*. *D*.

COROLLAIRE I.

59. Donc on aura $\frac{\mathit{ſin}\ A + \mathit{ſin}\ B}{\mathit{ſin}\ A - \mathit{ſin}\ B} = \frac{2\mathit{ſin}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \mathit{coſ}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}{2\mathit{coſ}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \mathit{ſin}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)} = \frac{\mathit{tang}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)}{\mathit{tang}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)} = \mathit{tang}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \mathit{cot}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ en ſubſtituant la tangente au lieu de $\frac{\mathit{ſin}}{\mathit{coſ}}$.

COROLLAIRE II.

60. Donc $\frac{\mathit{ſin}\ A + \mathit{ſin}\ B}{\mathit{coſ}\ A + \mathit{coſ}\ B} = \frac{2\mathit{ſin}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \mathit{coſ}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}{2\mathit{coſ}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \mathit{coſ}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}$

$= tang\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$ en effaçant ce qui se détruit, & substituant *tang* pour $\frac{sin}{cos}$.

COROLLAIRE III.

61. De même on trouvera que $\frac{sin\ A - sin\ B}{cos\ A + cos\ B} = \frac{2cos(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\times sin(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}{2cos(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)\times cos(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)} = tang\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$; enfin l'on fera voir de la même maniere que $\frac{sin\ A - sin\ B}{cos\ B - cos\ A} = cot\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$, & que $\frac{cos B + cos A}{cos B - cos A} = \frac{cot\ (\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B}{tang\ (\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B} = cot\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times cot\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

COROLLAIRE IV.

62. On trouveroit encore par des simples substitutions que $\frac{sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\times cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\times cos\left(\frac{A-B}{2}\right)} = \frac{sin\,(A+B)}{sin\,(A-B)}$; cela est une conséquence immédiate de ce que nous avons démontré (n°. 13) $R : cos\ \frac{1}{2}A :: 2sin\ \frac{1}{2}A : sin\ A$, en faisant $A = A + B$. On trouveroit de même que $\frac{cos(A+B)}{cos(A-B)} = \frac{RR - 2sin^2\left(\frac{A+B}{2}\right)}{RR - 2sin^2\left(\frac{A-B}{2}\right)}$. Enfin l'on pourroit encore déduire des différents triangles semblables que nous présente la figure 8, un grand nombre d'autres propriétés ; par exemple, du quadrilatere MOBE inscrit au cercle, on tireroit tout de suite les formules que nous avons démontrées au n°. 26 par de simples substitutions. Mais ce que nous venons d'exposer, sera plus que suffisant pour indiquer comment on peut trouver les propriétés dont on pourroit avoir besoin. Il ne nous reste plus qu'à faire quelques applications de ces formules.

Uſage de quelques-unes des Formules précédentes dans les Logarithmes.

63. Les formules $\sin A + \sin B = 2\sin(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ & $\sin A - \sin B = 2\cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \sin(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ indiquent comment il faut s'y prendre pour trouver les logarithmes de la ſomme ou de la différence de deux quantités données : un exemple fera concevoir aiſément la pratique de cette opération.

EXEMPLE I.

64. Soient les nombres 8467 & 8635 dont la ſomme eſt 17102, de laquelle il s'agit de trouver le logarithme; qu'on ſuppoſe ne ſe pas trouver dans les tables. (Il en ſeroit de même de deux autres nombres quelconques qui contiendroient même des fractions, & dont les logarithmes ſeroient donnés). Je me ſers de la formule $\sin A + \sin B = 2\sin(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. Pour avoir d'abord les angles A & B, j'ajoute 6 à la caractériſtique des logarithmes des nombres donnés, afin de pouvoir les trouver dans les tables des logarithmes des ſinus, parce que ces logarithmes n'ont point de caractériſtique au-deſſous de 7 ni au-deſſus de 9, & je trouve

$9{,}936262 = log.\ 8635 = log.\ sin.\ 59° 42' 40'' = A.$
$9{,}927730 = log.\ 8467 = log.\ sin.\ 57° 51' 16'' = B.$

d'où l'on tire $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = 58° 46' 58''$ & $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B = 1° 51' 24''$.

Je cherche enſuite les logarithmes du ſinus du premier de ces angles & celui du coſinus du dernier : à la ſomme de ces logarithmes j'ajoute celui du nombre 2; enfin de cette ſomme j'ôte 10 + 6 ou 16 à cauſe du rayon qui diviſe, & des ſix unités qui ont été ajoutées à la cara-

$0{,}301030\ log.\ de\ 2.$
$9{,}932072\ log.\ sin.(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B).$
$9{,}999914\ log.\ cos.(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B).$
$20{,}233016$
$4{,}233016 = log.\ 17102.$

ctériſtique, & je trouve que le logarithme de 17102, eſt égal au reſte 4,233016.

EXEMPLE II.

65. Pareillement on pourroit faire uſage des mêmes formules pour conſtruire par les logarithmes une expreſſion plus compliquée telle que ſeroit celle-ci $r \times \left(\frac{AA + aa - bb}{2Aa}\right)$ dans laquelle on ſuppoſera que r eſt le ſinus total ; que A eſt un nombre dont le logarithme = 4,054723; que celui de a = 3,108354, & celui de b = 3,876870, ce qui donnera les logarithmes des quantités A^2, a^2 bb en doublant les premiers. Cela poſé, je regarde d'abord les logarithmes de A^2 & a^2 comme ceux des ſinus de deux angles qu'il faut trouver. J'ajoute l'unité à chaque caractériſtique pour en trouver les logarithmes parmi ceux des ſinus. Ayant trouvé les angles qui leur répondent, j'acheve l'opération comme on le voit ici à côté ; & retranchant 10 + 1 de la caractériſtique du nombre trouvé, j'ai le logarithme de $A^2 + a^2$ = 8,115003; regardant de nouveau ce logarithme comme celui de *ſin* de A, & lui ajoutant l'unité ainſi qu'à celui de b^2, l'opération s'achevera comme on le voit ici, en ſe ſervant de la formule $\textit{ſin}\ A - \textit{ſin}\ B = 2\textit{ſin}\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right) \times \textit{coſ}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right)$

log. A^2 = 9,109446 = *log. ſin.* 7° 23′ 32″ = A
log. a^2 = 7,216708 = *log. ſin.* 0 5 40″ = B

donc on aura $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ = 3° 44′ 36″
& $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$ = 3° 38′ 56″

0,301030 = *log de* 2.
8,814845 = *log. ſin.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$
9,999119 = *log. coſ.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.
19,115003

9,115003 = *log. ſin.* 7° 29′ 16″ donc $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ = 5° 22′ 11″
9,753740 = *log. ſin.* 3° 15′ 6′ & $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$ = 2° 7′ 5″
0,301030 *log.* 2.
8,567716 = *log. ſin.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$
9,998091 = *log. coſ.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$.
18,866837
7,866837 = *log.* $A^2 + a^2 - b^2$.

0,301030 *log. de* 2.
4,054723 *log. de* A.
3,108354 *log. de* a.
7,464107 *log de* 2Aa.

$$\begin{array}{l} 17{,}866837 \ \textit{log. de}\ (AA+aa-bb)\times R. \\ \underline{7{,}464107} \\ 10{,}402730 \ \textit{log. de}\ \dfrac{(AA+aa-bb)\times R}{2Aa}. \end{array}$$

De l'uſage du Complément arithmétique.

66. Avant de terminer ces obſervations, il ne ſera pas inutile de donner une notion préciſe de ce que c'eſt que le complément arithmétique, dont les Géométres ſe ſervent ſouvent pour changer la ſouſtraction en addition. Pour cela ſoit, par exemple, le nombre 754 à ôter du nombre 896, je vois d'abord que ſi j'ôtois ce nombre de 1000, & que j'ajoutaſſe le reſte à 896 en ôtant de la ſomme le chiffre qui ſe trouveroit au rang des milles, ce ſeroit comme ſi je l'ôtois de 896 comme à l'ordinaire. Mais pour ôter ce nombre de 1000, il n'y a qu'à prendre tous les chiffres qui ſont des 9 avec chacun de ceux du nombre à ſouſtraire, excepté le dernier qui doit faire 10, comme la ſouſtraction le démontre; le nombre que l'on trouve par cette opération, eſt, ce que l'on appelle, *Complément arithmétique*. Ainſi dans notre exemple ce nombre eſt 246 que j'ajoute à 896, en ôtant de la ſomme 1142 l'unité du rang des milles, j'ai 142 pour le reſte cherché.

COROLLAIRE.

67. Il ſuit delà & des formules $\textit{cot}\ A = \frac{RR}{\textit{tang}\ A}$; $\textit{tang}\ A = \frac{R^2}{\textit{cot}\ A}$; $\textit{coſec}\ A = \frac{R^2}{\textit{ſin}\ A}$, & autres ſemblables, que les logarithmes de ces quantités ſe trouveront en ajoutant les compléments arithmétiques des dénominateurs au logarithme du rayon. Ou ce qui revient au même que les logarithmes de ces quantités ſe trouvent en prenant la différence du logarithme du dénominateur au logarithme du quarré du rayon qui a 20 pour charactériſtique.

SCHOLIE.

68. Comme il peut être quelquefois néceſſaire en ſe ſervant des formules que nous venons de démontrer dans le premier Chapitre de faire ſur elles différentes combinaiſons ou ſubſtitutions, & qu'il ſeroit incommode de les chercher dans les différents articles où elles ſe trouvent, nous croyons qu'on ſera bien aiſe de les trouver toutes ici réunies ſous un ſeul & même point de vue, ce qui nous ſervira d'ailleurs de renvoi toutes les fois que nous aurons dans la ſuite quelque ſubſtitution à faire. Nous avons eu de plus l'attention de garder par-tout l'homogénéité des termes, afin qu'on ſoit dans le cas d'employer toutes ces formules au beſoin avec plus de confiance.

Table générale des Formules démontrées dans le premier Chapitre.

69. $Sin.\frac{1}{2}A = cof.\frac{1}{2}$ *ſup. de* A. $tang.\frac{1}{2}A = cot.\frac{1}{2}$ *ſup.* A. (n°. 7).

70. $\frac{Sin.A \times R}{cof.A} = tang.A$ (n°. 9). $= \frac{ſin.A \times ſec.A}{R}$

71. $\frac{Cof.A \times R}{ſin.A} = cot.A$ (n°. 10). $= \frac{RR}{tang.A}$

72. $Sin.2A = \frac{cof.A \times 2ſin.A}{R}$ (n°. 13). $cof.2A = \frac{2cof^2A - RR}{R}$

73. $\frac{Sin.2A}{2ſin.A} = \frac{cof.A}{R} = \frac{R^2 - 2ſin^2\frac{1}{2}A}{RR}$ (n°. 21).

74. $\frac{1}{2}Sin.2A = \frac{cof.A \times ſin A}{R} = \frac{ſin^2A \times cot.A}{RR} = \frac{ſin^2A}{tang.A}$ (n°. 15).

75. $R + cof.A = \frac{2cof^2\frac{1}{2}A}{R} = \frac{ſin.A \times R}{tang.\frac{1}{2}A}$ (n°. 21). $= ſin.$V.A.(n°.22)
$R + ſin.A = 2ſin^2(45° + \frac{1}{2}A)$.

76. $R - cof.A = \frac{2ſin^2\frac{1}{2}A}{R} = \frac{ſin.A \times tang.\frac{1}{2}A}{R}$ (n°. 21). $=$
$ſin.$ v. A (n°. 22). $R - ſin.A = 2ſin^2(45° - \frac{1}{2}A)$.

77. $\frac{R + cof.A}{R - cof.A} = \frac{cot^2\frac{1}{2}A}{RR}$; $\frac{R - cof.A}{R + cof.A} \frac{tang^2\frac{1}{2}A}{RR}$ (n°. 22).

78. $\frac{R+\sin.A}{R-\sin.A}=\frac{\sin^2(45°+\frac{1}{2}A)}{\sin^2(45°-\frac{1}{2}A)}$ (n°. 22).

79. $Tang.\ A=\frac{RR-tang^2\frac{1}{2}comp.A}{2tang.\frac{1}{2}comp.A.}$ (n°. 20).

80. $Cot.\ A=\frac{RR-tang^2\frac{1}{2}A}{2tang.\frac{1}{2}A.}$ (n°. 20).

81. $Sec.\ A=\frac{RR}{cos.A}=\frac{tang.A\times R}{\sin.A}$ (n°s. 15 & 70).

82 & 83. $Cosec.A=\frac{RR}{\sin.A.}$ (n°. 15). $\frac{sec.A\times R}{cosec.A}=\frac{\sin.A}{cos.A}\times R=tang.A$ (n. 16)

84. $Sec.A=cot.\frac{1}{2}comp.A-tang.A$ (n°. 18). $=tang.A+cot.\frac{1}{2}A$ (n°. 19)
$=\frac{cot.(45°-\frac{1}{2}A)+cot.\frac{1}{2}A}{2.}=\frac{tang.(45°+\frac{1}{2}A)+cot.\frac{1}{2}A}{2.}$

85. $Cosec.\ A=cot.\frac{1}{2}A-cot.A$ (n°. 18). $=cot.\ A+tang.\frac{1}{2}A$ (n°. 19).
$=\frac{cot.\frac{1}{2}A+tang.\frac{1}{2}A}{2}$.

86. $Sin.(A\pm B)=\frac{\sin.A\times cos.B\pm\sin.B\times cos.A}{R}$ (n°. 23).

87. $Cos.(A\pm B)=\frac{cos.A\times cos.B\mp\sin.A\times\sin.B}{R}$. (n°. 24).

88. $\frac{Sin.(A+B)}{\sin.(A-B)}=\frac{tang.\ A+tang.B}{tang.A-tang\,B}$ (n°. 25) $=$
$\frac{\sin.(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\times cos.(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)}{\sin.(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)\times cos.(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}$. (n°. 62).

89. $\frac{Cos.(A+B)}{cos.(A-B)}=\frac{cot.B-tang.A}{cot.B+tang.A}$ (n°. 25). $=$
$\frac{(R+\sqrt{2}\sin.(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B))\times(R-\sqrt{2}\sin.(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B))}{(R+\sqrt{2}\sin.(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B))\times(R-\sqrt{2}\sin.(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B))}$ (n°. 26).
$=\frac{R^2-2\sin^2(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)}{R^2-2\sin^2(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}$. (n°. *idem*.

90. $Sin.(30°+A)=cos.A-\sin.(30°-A)$. (n°. 27).

91. $Cos.(30°+A)=cos.(30°-A)-\sin.A$. *idem*.

92. $Sin.\ A+\sin.B=2\sin.(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\times cos.(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$. (n°. 57).

93. $Sin.\ A-\sin.B=2cos.(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\times\sin.(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$. (n°. 57).

94. $Cos.\ A+cos.B=2cos.(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\times cos.(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$. (n°. 58).

95. $Cos.\ B-cos.A=2\sin.(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\times\sin.(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B.)$ (n°. 58).

96. $\frac{Sin.\ A + fin.\ B}{fin.\ A - fin\ B} = \frac{tang.(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)}{tang.(\frac{1}{2}A\frac{1}{2}B)}$. (n°. 59).

97. $\frac{Sin.\ A + fin.\ B}{cof.\ A + cof.\ B} = tang.(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$. (n°. 59).

98. $\frac{Sin.\ A + fin.\ B}{cof.\ B - cof.\ A} = cot.(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. (n°. 61).

99. $\frac{Sin.\ A - fin\ B}{cof.\ B + cof.\ A} = tang.(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. (n°. 61).

100. $\frac{Sin.\ A - fin.\ B}{cof.\ B - cof.\ A} = cot.(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$. (n°. 61).

101. $\frac{Cof.B+cof.A}{cof.B-cof.A} = \frac{cot.(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}{tang.(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)} = \frac{fec.\ A + fec.\ B}{fec.\ A - fec.\ B}$. (n°. 61).

102. $Sin.\ A \times fin.\ B = \frac{1}{2}\ cof.(A-B) - \frac{1}{2}\ cof.(A+B)$. (n°. 26).

103. $Sin.\ A \times cof.B = \frac{1}{2}\ fin.\ (A+B) + \frac{1}{2}\ fin.\ (A-B)$. (n°. 26).

104. $Cof.\ A \times fin.\ B = \frac{1}{2}\ fin.\ (A+B) - \frac{1}{2}\ fin.\ (A-B)$. (n°. 26).

105. $Cof.\ A \times cof.\ B = \frac{1}{2}\ cof.\ (A+B) + \frac{1}{2}\ cof.\ (A-B)$. (n°. 26).

106. $Tang.(A+B) = \frac{(tang.\ A + tang.\ B) \times RR}{RR - tang.\ A \times tang.\ B}$. (n°. 45)

107. $Tang.\ (A-B) = \frac{(tang.\ A - tang.\ B) \times RR}{RR + tang.\ A.\ tang.\ B}$. (n°. 45).

108. $Tang.\ (A+45°) = \frac{(R+tang.A)\times R}{R - tang.\ A}$ (n°. 46) $= \frac{RR}{tang.(45°-A)}$.

109. Si A excede 45°. $\frac{tang.\ A + R}{tang.\ A - R} = \frac{R}{tang.(A-45°)}$. (n°. 47).

CHAPITRE SECOND.

Des Propriétés générales des Triangles ſphériques rectangles ou non rectangles, & de leur réſolution par analogies.

PREMIERE SECTION.

Des Triangles ſphériques en général.

DÉFINITIONS.

110. TOUTE portion d'une ſurface ſphérique terminée par trois arcs de grand cercle, s'appelle *un Triangle ſphérique.* (fig. 9).

COROLLAIRE.

111. Il ſuit delà que la conſidération des petits cercles de la ſphere n'appartient pas à la Trigonométrie ſphérique, puiſqu'elle n'employe que ceux qui ont le même centre que la ſphere.

112. Tout triangle ſphérique, comme un triangle rectiligne, a eſſentiellement trois côtés & trois angles. Trois de ces ſix parties étant données, comme l'on voudra, la Trigonométrie enſeigne à trouver les autres.

SCHOLIE.

113. Dans la Trigonométrie rectiligne la connoiſſance des trois angles n'eſt pas ſuffiſante pour connoître les trois côtés ; dans ce cas on ne peut avoir que les rapports des trois côtés, & non leurs valeurs abſolues ; dans la Trigonométrie ſpérique au contraire, les côtés

n'étant que des ſecteurs de cercle dont la valeur dépend du nombre des degrés qu'ils contiennent, la connoiſſance des trois angles donne celle des trois côtés; ce qui rentre pourtant dans le cas correſpondant de la Trigonométrie rectiligne, à cauſe que chaque degré varie ſuivant le rayon du cercle auquel il appartient. Mais il y a encore une différence plus remarquable entre la Trigonométrie rectiligne & ſpérique, c'eſt que deux angles déterminent le troiſieme dans la Trigonométrie rectiligne, ce qui n'a pas lieu dans la Trigonométrie ſphérique; d'où il ſuit que la définition, telle que nous venons de la donner, n'a lieu ſtrictement que pour la Trigonométrie ſphérique. C'eſt ce que l'on ſera à portée de voir encore plus clairement par la ſuite.

114. Les côtés d'un triangle ſphérique ne ſont autre choſe que chacun des arcs de grand cercle qui, par leur leur interſection ſur la ſurface de la ſphere, déterminent le triangle ſphérique.

115. L'angle que ſont entr'eux les ſecteurs de cercle terminés à la ſurface de la ſphere, & que nous venons de nommer côtés du triangle ſphérique, forment ce que l'on appelle angle ſphérique. La Géométrie élémentaire nous apprend que cet angle ſe meſure par celui que forment deux lignes qui partent d'un même point de l'interſection commune des plans qui en forment les côtés; leſquelles lignes ſont perpendiculaires à cette même commune interſection.

COROLLAIRE.

116. Il ſuit delà que la ſurface d'un triangle ſphérique BAC (*fig.* 9 & 10) & les trois plans qui le terminent, forment une eſpece de Pyramide triangulaire BGCA, dont le ſommet G eſt au centre de la ſphere, la baſe une portion de la ſurface ſphérique, & dont les faces ſont des portions de grand cercle ou ſecteurs circulaires tels que AGC, AGB & BGC, leſquels ſont en même temps les côtés du triangle BAC.

Définitions.

117. Une ligne comme PG*p* perpendiculaire au plan d'un grand cercle, paſſant par le centre de la ſphere & terminée de part & d'autre à ſa ſurface, ſe nomme *l'axe* de ce grand cercle. Les points P, *p* dans leſquels elle rencontre cette ſurface, ſont nommés les *poles* de ce même grand cercle. De plus ſi l'on conçoît une infinité de petits cercles paralleles au premier, cet axe leur ſera auſſi perpendiculaire, & les points P & *p* ſont auſſi les poles de ces mêmes petits cercles.

Corollaire I.

118. Donc chaque pole d'un grand cercle eſt éloigné de tous les points de ſa circonférence de 90°, & tous les arcs menés du pole d'un petit cercle à ſa circonférence ſont tous égaux entr'eux.

Corollaire II.

119. Il ſuit encore delà que tous les arcs de grand cercle menés par le pole d'un cercle quelconque, ſont perpendiculaires à ce grand cercle; car puiſqu'ils ſont des grands cercles, comme on le ſuppoſe, ils paſſent tous par le centre de la ſphere; donc ils paſſent tous par l'axe de ce grand cercle. Il faut dire la même choſe des petits cercles.

Corollaire III.

120. Donc pour trouver le pole d'un cercle quelconque, il n'y a qu'à tracer ſur la ſurface ſphérique deux grands cercles perpendiculaires à ſon plan; les points où ces cercles ſe couperont, ſoit au-deſſus ſoit au-deſſous, ſeront les poles demandés.

Corollaire IV.

121. Il ſuit encore delà que ſi d'un point pris ſur la ſurface

ſurface ſphérique on veut mener un arc de cercle qui meſure la plus courte diſtance de ce point à la circonférence d'un cercle quelconque, il faut tracer un arc de cercle dont le prolongement paſſe par les poles du cercle donné: & réciproquement; ſi cet arc paſſe par les poles d'un cercle donné, il meſurera la plus courte diſtance d'un point donné à la circonférence.

COROLLAIRE V.

122. Si l'on prend ſur les côtés AC & BC (*fig.* 10) d'un triangle ſphérique BCA des arcs CL & CK de 90° chacun, & qu'ayant tiré les rayons GL & GK, on faſſe paſſer par ces lignes un plan LGK, il eſt viſible que le point C ſera le pole de ce cercle; & comme les lignes GK, GL ſont perpendiculaires à l'interſection commune des plans AGC, BGC, elles meſurent par leur inclinaiſon l'angle des mêmes plans, & par conſéquent auſſi l'angle ſphérique BCA.

COROLLAIRE VI.

123. Il eſt encore viſible que tout arc de petit cercle décrit du pole C comme centre, étant d'un même nombre de degrés que l'arc KL eſt également propre à meſurer le même angle ACB; mais on n'employe communément que des arcs de grand cercle.

COROLLAIRE VII.

124. Donc ſi un angle ſphérique eſt droit, les deux arcs de grand cercle qui le forment, paſſent réciproquement par leurs poles. Et ſi les plans de deux grands cercles renferment leurs axes reſpectifs, ou paſſent par les poles l'un de l'autre, l'angle qu'ils comprennent, eſt un angle droit.

THÉOREME I.

125. *Deux côtés quelconques d'un triangle ſphérique* BAC

pris enſemble, ſont toujours plus grands que le troiſieme.

DÉMONSTRATION.

Cette propoſition eſt une ſuite néceſſaire de ce que le chemin le plus court entre deux points pris ſur la ſurface de la ſphere, eſt l'arc de grand cercle qui paſſe par ces mêmes points. *C. Q. F. D.*

THÉOREME II.

126. *La ſomme des trois côtés d'un triangle quelconque eſt toujours moindre que* 360°. (fig. 10).

DÉMONSTRATION.

Soient prolongés les côtés AC & BC d'un angle quelconque juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent de nouveau en *D*. Les arcs DAC, DBC ſeront chacun de 180°, puiſque tous les grands cercles ſe coupent en deux parties égales. On aura donc DAC + DBC = 360°. Mais par le dernier Théorême DA + DB > AB; donc les trois côtés AB, AC & BC pris enſemble ne valent pas 360°. *C. Q. F. D.*

THÉOREME III.

127. *La ſomme des trois angles d'un triangle ſphérique quelconque, eſt toujours plus grande que deux angles droits & moindre que ſix.*

DÉMONSTRATION.

Si les côtés AB, AC & BC du triangle ſphérique ſont infiniment petits, les interſections que forment entre eux les plans qui déterminent les côtés, ſeront infiniment près d'être des lignes paralleles; la ſurface du triangle ſphérique ſera près de ſe confondre avec une ſurface plane. Donc le triangle peut être conſidéré comme un triangle rectiligne; mais on ſait que les angles d'un tel triangle ne valent que deux droits; donc tant que les côtés du triangle ſphérique ſeront d'une grandeur finie, les

angles pris enſemble vaudront toujours plus que deux droits.

2°. L'on voit aiſément à l'inſpection de la figure 10 que chaque angle du triangle ſphérique BAC peut être obtus, de maniere cependant que l'arc qui en eſt la meſure ſoit moindre que 180°; puiſqu'alors il n'y auroit plus d'angle. Donc en ſuppoſant les trois angles obtus, on ne pourra jamais avoir ſix angles droits pour la ſomme des trois angles du triangle ſphérique. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

128. Donc un triangle ſphérique peut avoir ſes trois angles droits ou même obtus; d'où il ſuit que la connoiſſance de deux angles quelconques ne ſuffit pas pour faire découvrir le troiſieme.

COROLLAIRE II.

129. Si les trois angles d'un triangle ſont droits ou obtus, les trois côtés ſont auſſi de 90° ou plus grands que 90°. Et ſi ſes trois angles ſont aigus, les trois côtés ſont auſſi moindres que 90°; & réciproquement.

SCHOLIE.

130. On voit par ces Théorêmes en quoi les triangles ſphériques différent eſſentiellement des triangles rectilignes. D'un autre côté ils ont auſſi pluſieurs autres propriétés qui leur ſont communes avec les triangles rectilignes, & qui ſe démontrent préciſément de la même maniere.

Par exemple, on feroit voir comme dans la Géométrie élémentaire que deux triangles ſphériques ſont égaux en tout: 1°, lorſque les trois côtés de l'un ſont égaux aux trois côtés de l'autre; 2°, lorſqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux; 3°, lorſqu'ils ont des angles égaux ſur des baſes égales.

De même on feroit voir qu'un triangle ſphérique eſt équilatéral, iſoſcele ou ſcalene, ſelon qu'il a trois angles

égaux, ou deux angles égaux, ou ſes trois angles inégaux ; & réciproquement ; enfin que le plus grand côté eſt toujours oppoſé au plus grand angle, & le plus petit côté au plus petit angle. Toutes ces vérités ſe démontrent de la même maniere que ſur les triangles rectilignes, ainſi il ſeroit inutile de s'y arrêter plus long-temps.

THÉOREME IV.

131. *Si des trois angles* B, A, C *d'un triangle ſphérique quelconque* BAC *comme poles, on décrit ſur la ſurface de la ſphere trois arcs de grand cercle* DF, DE, FE *qui, par leur rencontre, forment un nouveau triangle ſphérique* DEF (fig. 11), *chaque côté de ce nouveau triangle ſera ſupplément de l'angle qui eſt à ſon pole, & chaque angle de même triangle ſera ſupplément du côté qui lui eſt oppoſé dans le triangle* BAC.

DÉMONSTRATION.

Soient prolongés les côtés AB, AC & BC du triangle BAC juſqu'à ce qu'ils rencontrent ceux du triangle DEF aux points I, L ; M, N ; G, K : cela poſé, puiſque le point A eſt le pole de l'arc DILE, la diſtance des points A, E eſt de 90°. Et puiſque C eſt le pole de l'arc EF, les points C, E ſont auſſi éloignés de 90°. Donc le point E eſt le pole de l'arc AC (n°. 118). On prouvera de même que F eſt le pole de BC, & D le pole de l'arc AB.

Cette conſtruction bien entendue, on aura DL = 90° IE = 90° ; donc DL + IE, ou DL + EL + LI, ou encore DE + IL = 180°. Donc l'arc DE eſt ſupplément de l'angle BAC meſuré par l'arc IL (n°. 122). On prouvera de même que EF eſt ſupplément de l'angle BCA meſuré par l'arc MN, & que DF eſt ſupplément de l'angle ABC meſuré par GH ; d'où il ſuit que chaque côté du triangle DEF eſt ſupplément de l'angle du triangle BAC qui eſt à ſon pole. *C. Q. F.* 1°, *D.*

2°. Les angles de ce même triangle ſont ſuppléments des côtés du triangle ABC; car puiſque les arcs AL & BG ſont de 90°, on aura AL + BG ou GL + AB = 180°, mais GL eſt la meſure de l'angle en D (n° 122). Donc AB eſt ſupplément de l'angle EDF; on prouveroit de même que AC & BC ſont ſuppléments des angles en E & en F; donc tous les angles du triangle DEF ſont ſuppléments des côtés oppoſés du triangle BAC. *C. Q. F.* 2°, *D.*

SECONDE SECTION.

De la Réſolution des Triangles ſphériques rectangles.

Préparation aux Théorêmes ſuivants. (fig. 12).

132. SOIT une pyramide GBPQ compoſée de quatre triangles rectangles GBQ, GBP, GPQ, BPQ; & ſoient AB, AC, & BC trois arcs de cercle décrits du centre G avec le rayon GB; il eſt viſible que ces trois arcs de cercles formeront un triangle ſphérique BAC rectangle en A, à cauſe que les plans GPQ, GBP ſont perpendiculaires l'un à l'autre. En faiſant le rayon égal à l'unité, on trouvera aiſément les valeurs contenues dans la Table ſuivante pour toutes les parties de ce même triangle. Il ſuffit, pour les découvrir, de ſe rappeller que $tang = \frac{ſin}{coſ}$, que $cot = \frac{RR}{tang.} = \frac{coſ}{ſin}$, & l'on trouvera que

1°. L'arc BC ou l'angle QGB	a pour *ſinus*	$\frac{BQ}{GQ}$	pour *coſ.*	$\frac{BG}{GQ}$	pour *tang.*	$\frac{BQ}{BG}$
2°. L'arc BA ou l'angle BGP		$\frac{BP}{GP}$		$\frac{GB}{GP}$		$\frac{BP}{BG}$
3°. L'arc AC ou l'angle PGQ		$\frac{QP}{GQ}$		$\frac{GP}{GQ}$		$\frac{QP}{GP}$
4°. L'angle ABC ou QBP		$\frac{PQ}{BQ}$		$\frac{BP}{BQ}$		$\frac{QP}{BP}$
5°. L'angle BCA		$\frac{BP \times GQ}{BQ \times GP}$		$\frac{QP \times BG}{GP \times BQ}$		$\frac{BP \times GQ}{PQ \times BG}$

133. Pour démontrer toutes ces expreſſions, il ſuffira de démontrer la premiere ligne ſeulement. Je prends à cet effet une ligne quelconque GR que je regarde comme le ſinus total des tables, & ayant abaiſſé RS perpendiculaire à GB, il eſt viſible que cette ligne ſera le ſinus de l'arc BC, & GS ſera le coſinus du même arc. Cela poſé, les triangles ſemblables GRS, GQB donnent les deux proportions ſuivantes GQ : QB : : GR (1) : RS = *ſin* B C = $\frac{QB}{GQ}$ & GQ : GB : : GR (1) : GS = *coſ* BC = $\frac{GB}{GQ}$. D'où l'on tire ſur le champ *tang* BC = $\frac{BQ}{BG}$ & *cot* BC = $\frac{BG}{BQ}$. Les autres valeurs ſe démontrent préciſément de la même maniere. Pour démontrer les Théorêmes ſuivants, il ſuffira de ſubſtituer dans chacun en particulier les valeurs des termes de chaque proportion à démontrer, & l'on trouvera par-tout une égalité parfaite entre le produit des extrêmes & celui des moyens.

THÉOREME I.

134. *Dans un triangle ſphérique quelconque rectangle* BAC, *le ſinus total eſt au ſinus de l'hypoténuſe, comme le ſinus d'un angle eſt au ſinus du côté qui lui eſt oppoſé ; & réciproquement.* (fig. 13).

N. B. C'eſt par ce Théorême qu'on a trouvé les expreſſions du ſinus & coſinus de l'angle BCA, ainſi que celle de ſa tangente & cotangente.

THÉOREME II.

135. *Dans un triangle ſphérique rectangle on aura toujours, le rayon eſt au coſinus d'un angle, comme la tangente de l'hypoténuſe eſt à la tangente du côté adjacent à cet angle ;* c'eſt-à-dire, que R : *coſ* B : : *tang* BC : *tang* AB ; ou R : *coſ* C : : *tang* BC : *tang* AC.

THÉOREME III.

136. *On aura de plus dans tout triangle rectangle, le ſinus total eſt au coſinus d'un des côtés, comme le coſinus de l'autre côté eſt au coſinus de l'hypoténuſe, ou ce qui revient au même* R : *coſ* AB : : *coſ* AC : *coſ* BC.

THÉOREME IV.

137. *On aura encore, le rayon eſt au ſinus d'un angle, comme le coſinus du côté adjacent eſt au coſinus de l'autre angle;* ou R : *ſin* B ou *ſin* C : : *coſ* AB ou *coſ* AC : *coſ* C ou *coſ* B.

THÉOREME V.

138. *Le rayon eſt au ſinus d'un côté, comme la tangente de l'angle adjacent à ce côté eſt à la tangente de l'autre côté,* ou R : *ſin* AB : : *tang* B : *tang* AC : ou R : *ſin* AC : : *tang* C : *tang* AB.

THÉOREME VI.

139. *Le rayon eſt à la cotangente d'un angle, comme la cotangente de l'autre angle eſt au coſinus de l'hypoténuſe; ou ce qui revient encore au même, le rayon eſt au coſinus de l'hypoténuſe, comme la tangente d'un angle eſt à la cotangente de l'autre angle.* Ou R : *cot* B : : *cot* C : *coſ* BC ; ou encore R : *coſ* BC : : *tang* B : *cot* C : : *tang* C : *cot* B.

COROLLAIRE I.

140. Il ſuit du Théorême ſecond que ſi deux triangles ſphériques rectangles ont un côté commun, les tangentes des hypoténuſes ſont en raiſon inverſe des coſinus des angles adjacents à ce même côté.

COROLLAIRE II.

141. Il ſuit de même du troiſieme Théorême que ſi deux triangles ſphériques rectangles ont un côté commun,

les cosinus de leurs hypoténuses sont comme les cosinus des côtés non communs.

Corollaire III.

142. Il suit aussi du quatrieme Théorême que si deux triangles rectangles ont un côté commun, les cosinus des angles opposés à ce côté sont entr'eux comme les sinus des angles adjacents.

Corollaire IV.

143. Il suit aussi du cinquieme Théorême que si deux triangles rectangles ont un côté commun, les sinus des côtés non communs sont réciproquement comme les tangentes des angles sur les côtés.

Corollaire V.

144. Enfin si deux triangles sphériques rectangles ont un angle commun, les sinus de leurs hypoténuses sont comme les sinus des côtés opposés à l'angle commun, & les tangentes des mêmes côtés sont comme les sinus des côtés adjacents à l'angle commun. Ces vérités se déduisent immédiatement la premiere du premier Théorême, & la seconde du cinquieme.

Scholie.

145. Ces six Théorêmes suffisent pour résoudre tous les cas possibles des triangles sphériques rectangles, comme on peut s'en convaincre par la Table que nous joignons ici; néanmoins comme il y auroit encore quelque difficulté à les retenir, & qu'il seroit dangereux de les confondre, nous ajouterons encore le Théorême de Neper qui les réduit tous à deux cas généraux dont on peut se souvenir bien plus aisément, pourvu que l'on ait bien entendu les définitions suivantes, qui sont absolument nécessaires pour son intelligence.

DÉFINITIONS.

146. Lorſque trois parties d'un triangle ſont tellement diſpoſées que deux d'entr'elles touchent immédiatement la troiſieme, ou n'en ſont ſéparées que par l'angle droit, ces deux parties ſe nomment *Adjacentes* à la troiſieme que l'on nommera partie *moyenne*.

147. Lorſque trois parties d'un triangle rectangle ſont tellement diſpoſées qu'entre l'une des trois que nous regarderons toujours comme *moyenne* & chacune des deux autres, il ſe trouve toujours une autre partie du même triangle; ces deux parties ſeront nommées parties *ſéparées*. L'angle droit eſt cenſé ne point ſéparer les parties entre leſquelles il ſe trouve. Cela poſé.

Si les parties moyennes ſont	Les adjacentes ſeront	Et les parties ſéparées ſont
AB	AC & B	BC & C
AC	AB & C	BC & B
BC	B & C	AC & AB
B	AB & BC	AC & C
C	AC & BC	AB & B.

THÉORÈME GÉNÉRAL.

148. *Dans un triangle ſphérique rectangle ſi l'on ſubſtitue aux côtés de l'angle droit les compléments de ces côtés, on aura dans tous les cas, le produit du ſinus total par le coſinus de la partie moyenne égal au rectangle des cotangentes des parties adjacentes, ou au rectangle des ſinus des parties ſéparées.*

DÉMONSTRATION.

On a eu ſoin de détailler dans la table pour les réſolutions des triangles rectangles, tous les cas du Théorême préſent, en déſignant par un *A* les cas qui ont rapport aux parties adjacentes, & par une *S* ceux où les parties ſont ſéparées. Ainſi la vérité du Théorême générale eſt démontrée par celle des Théorêmes particuliers correſpondants aux mêmes cas. On peut néanmoins le démontrer directement par la table du n°. 132, en

ſubſtituant à chaque terme les valeurs qui conviennent ; par exemple, pour démontrer la premiere ligne du n°. 147. Tout ſe réduit à prouver que $R \times \textit{ſin}\ AB = \textit{tang}\ AC \times \textit{cot}\ B = \textit{ſin}\ BC \times \textit{ſin}\ C$. Prenant donc les expreſſions de ces lignes au n°. 132. on aura

$$R \times \frac{BP}{GP} = \frac{QP}{GP} \times \frac{BP}{QP} = \frac{BQ \times BP \times GQ}{GQ \times BQ \times GP},$$ ce qui eſt évident après avoir effacé les termes qui ſe détruiſent aux deux dernieres fractions. Il en ſeroit ainſi des autres, d'où l'on doit conclure la vérité de notre Théorême dans tous les cas poſſibles. *C. Q. F. D.*

De la valeur des Angles d'un Triangle rectangle eu égard aux côtés qui comprennent l'angle droit.

THÉOREME.

149. *Dans un triangle quelconque rectangle* BAC, *ou* bAC, *les angles ſur l'hypoténuſe ſont toujours de même eſpece que les côtés qui leur ſont oppoſés ; 2°, l'hypoténuſe eſt moindre ou plus grande qu'un quart de cercle* (fig. 13) *ſuivant que les côtés de l'angle droit ſont de même ou de différente eſpece, c'eſt-à-dire, ſuivant que ces mêmes côtés ſont tous deux aigus ou obtus, ou que l'un eſt aigu & l'autre obtus.*

DÉMONSTRATION.

1°, Si les côtés AB, AC de l'angle droit BAC ſont chacun de 90°, à cauſe de l'angle A qui eſt droit, comme on le ſuppoſe, les points B & C deviendront les poles des arcs AC & AB, & par conſéquent les angles B & C ſont des angles droits, puiſqu'ils ſont meſurés par les arcs que nous ſuppoſons de 90°, c'eſt-à-dire, que ces angles ſont de même nature que les côtés oppoſés. De plus ſi les côtés AB & AC ſont aigus, les angles qui leur ſont oppoſés, le ſeront auſſi ; ce que l'on prouvera aiſément comme il ſuit. Soit prolongé le côté AC en F juſqu'à ce

que AF ſoit de 90°; le point F ſera le pole de l'arc AB (n°. 117). Ce qui donne l'angle B auſſi de 90°, & par conſéquent l'angle ABC néceſſairement aigu, puiſqu'il eſt moindre que l'angle ABF. On prouveroit de même que l'angle en C eſt aigu, lorſque le côté AB qui lui eſt oppoſé, eſt moindre que 90°. De plus il n'eſt pas moins viſible que les angles B & C du triangle B*a*C rectangle en *a* ſont obtus, lorſque les côtés *a*B & *a*C qui leur ſont oppoſés, ont plus de 90°. 3°, Si l'un des côtés A*b* eſt obtus & l'autre côté AC aigu comme au triangle rectangle *b*AC, l'angle en C ſera auſſi obtus, & l'angle en *b* ſera aigu. Car ayant pris ſur AB*b* l'arc AG de 90°, & tiré du point G au point C l'arc GC, l'angle ACG ſera droit, puiſque G eſt le pole de l'arc AC (n°. 119); d'où il ſuit néceſſairement que l'angle AC*b* ſera obtus. Par la même raiſon l'angle *ab*C eſt obtus au triangle rectangle *ba*C à cauſe qu'il eſt oppoſé au côté *a*C obtus; donc ſon ſupplément A*b*C ſera aigu, c'eſt-à-dire, de même eſpece que le côté qui lui eſt oppoſé. Donc en général les angles ſur l'hypoténuſe ſont toujours de même eſpece que les côtés qui leur ſont oppoſés. *C. Q. F.* 1°. *D.*

2°, Il eſt viſible que l'hypoténuſe BC du triangle BAC eſt moindre que BF, ainſi que lorſqu'elle eſt hypoténuſe du triangle B*a*C; l'hypoténuſe *b*C eſt plus grande que *b*F au triangle *ba*C; d'où il ſuit que l'hypoténuſe d'un triangle rectangle quelconque eſt toujours moindre que 90°, lorſque les deux côtés ſont de même eſpece, & qu'elle eſt plus grande, lorſque les deux côtés ſont de différentes eſpeces. *C. Q. F.* 2°, *D.*

On voit aiſément que le réciproque de ce Théorême eſt vrai dans toutes ſes parties, c'eſt-à-dire, que ſi les angles ſur l'hypoténuſe ſont de même ou de différente eſpece, les côtés qui leur ſont oppoſés, ſeront auſſi dans le même cas. 2°, Que ſi ſes côtés ſont encore de même eſpece ou de différente eſpece, l'hypoténuſe ſera

plus petite ou plus grande qu'un quart de cercle, & qu'elle ſera préciſément de 90°, s'il y a un ou deux côtés de 90°.

PROBLEME I.

150. *L'hypoténuſe* BC *d'un triangle ſphérique rectangle* BAC *avec la ſomme ou la différence des deux côtés* AB, AC *étant connues; déterminer le triangle.* (fig. 13).

SOLUTION.

Puiſque l'on a (n°. 136) R : *cof* AB : : *cof* AC : *cof* BC, on aura auſſi *cof* AB × *cof* AC = R × *cof* BC. Mais (n°. 105) *cof* AB × *cof* AC = $\frac{1}{2}$ *cof*(AB + AC) + $\frac{1}{2}$ *cof*(AB — AC). Ce qui donne ſur le champ 2R × *cof* BC — *cof* (AB + AC) = *cof* (AB — AC). Ou 2R × *cof* BC — *cof* (AB — AC) = *cof* (AB + AC). *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE.

151. Donc ſi les côtés du triangle ſont égaux, on aura 2 *cof* BC — R = *cof* 2 AB ou *cof* 2 AC, ce qui apprend que dans ce cas le coſinus du double d'un des côtés eſt égal au double du coſinus de l'hypoténuſe moins le ſinus total.

PROBLEME II.

152. *Connoiſſant un côté quelconque avec la ſomme ou la différence de l'hypoténuſe, & de l'autre côté trouver l'hypoténuſe.*

SOLUTION.

Puiſque l'on a R : *cof* AB : : *cof* AC : *cof* BC (n°. 136) on aura auſſi *componendo* & *detrahendo* R + *cof* AB : R — *cof* AB : : *cof* AC + *cof* BC : *cof* AC — *cof* BC. Ce qui devient par les n°. 77 & 101. *cot* $\frac{AB}{2}$: *tang* $\frac{AB}{2}$: : *cot* $\left(\frac{BC+AC}{2}\right)$: *tang* $\left(\frac{BC-AB}{2}\right)$. D'où il ſuit que ſi l'on connoît la ſomme ou la différence de l'hypoténuſe & de

l'autre côté, cette analogie fera trouver la différence ou la ſomme de la même hypoténuſe & de l'autre côté.

PROBLEME III.

153. *Connoiſſant un des angles ſur l'hypoténuſe avec la ſomme ou la différence de l'hypoténuſe & du côté adjacent dans un triangle rectangle, réſoudre ce même triangle.*

SOLUTION.

Puiſque l'on a R : *cof* B : : *tang* BC : *tang* AB (n°. 135); on a auſſi *addendo & detrahendo* R + *cof* B : R — *cof* B : : *tang* BC + *tang* AB : *tang* BC — *tang* AB, ce qui devient par les n°. 77 & 88. $R^2 : cot^2 \frac{1}{2} B$, ou *tang* $\frac{1}{2}$ B : *cot* $\frac{1}{2}$ B : : *ſin* (BC + AB) : *ſin* (BC — AB). *C. Q. F. T.*

PROBLEME IV.

154. *Connoiſſant l'hypoténuſe & la ſomme ou la différence des angles ſur l'hypoténuſe, trouver ces mêmes angles.*

SOLUTION.

Par le n°. 139, on a R : *cof* BC : : *tang* B : *cot* C, ce qui donne en opérant comme au dernier problême, $R^2 : tang^2 \frac{1}{2} BC$: : *cof* (B + C) : *cof* (B — C) d'où ſuit la ſolution demandée. Et ſi les deux angles ſont égaux, on aura $tang^2 \frac{1}{2} BC : R^2 : : R :$ *cof* 2B. *C. Q. F. T.*

PROBLEME V.

155. *Connoiſſant dans deux triangles* BAC, BDG *qui ont un angle commun, les côtés* AC, DG *oppoſés à cet angle avec la ſomme ou la différence des hypoténuſes, déterminer ces triangles.* (fig. 14).

SOLUTION.

Puiſque l'on a *ſin* DG : *ſin* AC : : *ſin* BG : *ſin* BC, on aura auſſi *addendo & detrahendo ſin* DG + *ſin* AC : *ſin* DG — *ſin* AC : : *ſin* BG + *ſin* BC : *ſin* BG —

ſin BC. Donc on aura (n°. 96) *tang* $\left(\frac{DG+AC}{2}\right)$: *tang* $\left(\frac{DG-AC}{2}\right)$: : *tang* $\left(\frac{BG+BC}{2}\right)$: *tang* $\left(\frac{BG-BC}{2}\right)$; d'où il eſt aiſé de réſoudre le problême, puiſque l'on aura toujours trois termes de connus dans cette proportion. *C. Q. F. T.*

PROBLEME VI.

156. *Suppoſant toujours deux triangles qui ont un angle commun, & que l'on connoît les côtés oppoſés à cet angle avec la différence ou la ſomme des côtés adjacents, déterminer chacun de ces triangles.*

SOLUTION.

Puiſque l'on a *tang* DG : *tang* AC : : *ſin* BD : *ſin* BA, on aura auſſi *tang* DG + *tang* AC : *tang* DG — *tang* AC : : *ſin* BD + *ſin* BA : *ſin* BD — *ſin* BA. D'où l'on tire par des ſubſtitutions ſemblables aux précédentes *ſin* (DG + AC) : *ſin* (DG — AC) : : *tang* $\left(\frac{BD+BA}{2}\right)$: *tang* $\left(\frac{BD-BA}{2}\right)$. *C. Q. F. T.*

TROISIEME SECTION.

De la Réſolution des Triangles ſphériques obliquangles.

THÉOREME I.

157. *DANS un triangle ſphérique quelconque* BAC, *les ſinus des angles ſont entr'eux comme les ſinus des côtés qui leur ſont oppoſés.* (fig. 15).

DÉMONSTRATION.

D'un angle quelconque A du triangle ſphérique BAC ſoit abaiſſé l'arc AD perpendiculaire à la baſe BC. Cela poſé dans chaque triangle rectangle BAD, CAD on aura (n°. 134). R : *ſin* AB :: *ſin* B : *ſin* AD. Et R : *ſin* AC :: *ſin* C : *ſin* AD. D'où l'on tire ſur le champ *ſin* AB × *ſin* B = *ſin* AC × *ſin* C, ce qui donne la proportion

Sin B : *ſin* C :: *ſin* AB : *ſin* AC. C. Q. F. T.

DÉFINITIONS.

158. Les angles BAD, CAD (*fig.* 15) que forment les côtés AB, AC de l'angle BAC avec la perpendiculaire, ſeront nommés les *Segments de l'angle vertical*, ſoit que la perpendiculaire tombe en dedans, ſoit qu'elle tombe au dehors du triangle BAC.

Seconde. De même les parties BD & DC du côté BC compriſes entre les points B & C, & le point D où ce côté eſt rencontré par la perpendiculaire AD, ſe nommeront les *Segments de la baſe;* ſoit que cette baſe ſoit prolongée ou non.

Troiſieme. Si l'on conſidere les ſegments BAD, CAD de l'angle BAC, les côtés AB, AC du même angle ſeront nommées *Parties adjacentes*, parce qu'elles

le ſont en effet. Et les angles B & C ſur la baſe BC ſeront des *Parties ſéparées*, à cauſe qu'en effet il ſe trouve entre ces angles & les ſegments les côtés BA & CA.

Quatrieme. Si l'on conſidere les ſegments BD & CD de la baſe, les angles B & C ſeront les *parties adjacentes*, & les côtés BA & CA ſeront nommés *parties ſéparées* à l'égard des mêmes ſegments de la baſe. Cela poſé, il ſera facile de retenir les deux parties du Théorême ſuivant.

THÉOREME.

159. Si d'un angle A quelconque d'un triangle ſphérique BAC on abaiſſe une perpendiculaire AD ſur le côté BC prolongé : s'il eſt néceſſaire, on aura toujours,

1°. *Les ſinus des ſegments de l'angle comme les coſinus des parties ſéparées ; & les coſinus des mêmes ſegments comme les cotangentes des parties adjacentes.*

2°. *Les ſinus des ſegments de la baſe comme les cotangentes des parties adjacentes ; & les coſinus des ſegments de la même baſe comme les coſinus des parties ſéparées.*

Il faut donc prouver 1°. que *ſin* BAD : *ſin* CAD :: *coſ* B : *coſ* C.
2°. que *coſ* BAD : *coſ* CAD :: *cot* AB : *cot* AC.
3°. que *ſin* BD : *ſin* CD : : *cot* B : *cot* C.
4°. que *coſ* BD : *coſ* CD : : *coſ* AB : *coſ* AC.

DÉMONSTRATION.

Dans le triangle rectangle BDA on aura par le Théorême IV.

R : *coſ* AD : : *ſin* BAD : *coſ* B, & le triangle rectangle CDA donne auſſi par le même (n°.)

R : *coſ* AD : : *ſin* CAD : *coſ* C, donc 1°. *ſin* BAD : *ſin* CAD : : *coſ* B : *coſ* C.

2°. Les mêmes triangles donneront encore par le ſecond Théorême.

R : *coſ* BAD : : *cot* AD : *cot* BA : & R : *coſ* CAD :: *cot* AD : *cot* CA. Donc puiſque ces deux proportions ont les mêmes antécédents, on aura *coſ* BAD : *coſ* CAD : : *cot* AB : *cot* AC.

3°. Les

3°. Les mêmes triangles donneront encore par le Théorême V, les deux proportions ſuivantes. Savoir pour BDA; R : *ſin* BD : : *cot* AD : *cot* B; & pour CDA, R : *ſin* CD : : *cot* AD : *cot* C.

Donc puiſque les antécédents ſont égaux, les conſéquents ſeront auſſi en proportion, & donneront *ſin* BD : *ſin* CD : : *cot* B : *cot* C.

Enfin par le Théorême III, on aura dans le triangle BAD, R : *coſ* BD : : *coſ* AD : *coſ* BA.

Et dans le triangle CDA par le même art. . . . . R : *coſ* DC : : *coſ* AD : *coſ* AC.

D'où il ſuit auſſi que *coſ* BD : *coſ* CD : : *coſ* BA : *coſ* AC. *C. Q. F.* 4°, *D.*

SCHOLIE.

160. Les quatre parties de ce Théorême ſont au fond la même choſe que les Corollaires que nous avons ajoutés à la ſuite des ſix Théorêmes ſur les triangles rectangles. Seulement nous avons tâché de les rendre plus faciles à retenir, au moyen des définitions que nous avons données avant ce Théorême.

Préparation aux Théorêmes ſuivants.

PROBLEME.

161. *Etant donné un triangle ſphérique quelconque* BAC (fig. 16) *dont on ſuppoſe un côté* AB *ſur la circonférence d'un grand cercle* ABRFar *; trouver la projection orthographique* ACB *de ce même triangle ſur le plan du même grand cercle ; c'eſt-à-dire, celle qui eſt formée par des lignes abaiſſées de tous les points des côtés du triangle* ABC *perpendiculairement au plan* ABRFr.

SOLUTION.

Des extrémités A, B de l'arc AB ſoient menés au centre G les rayons GA & GB. Par le même centre G

qui eſt auſſi celui de la ſphere, ſoit conçu un plan ou grand cercle *r*DR*o* perpendiculaire au plan AR*ar*, dont la commune ſection R*r* avec le plan de ce même cercle, ſoit perpendiculaire au rayon AG ; enfin ſoit prolongé l'arc AC juſqu'à ce qu'il rencontre la circonférence *r*DR*o* dans un point D duquel ſoit encore menée au centre G la ligne DG & la ligne D*d* perpendiculaire au diametre R*r*.

Cela poſé, il eſt évident que l'angle DGR eſt le même que l'angle BAC formé par la rencontre des plans BAG, CAG ; puiſque les lignes DG, RG ſont toutes deux perpendiculaires à l'interſection commune AG ; & l'angle DG*r* eſt égal au ſupplément du même angle BAC. Il n'eſt pas moins viſible que ſi par le point C, on mene une ligne C*c* perpendiculaire au même plan AR*ar*, le point *c* ſera la projection de l'angle C ; & ſi par cette ligne C*c* l'on fait paſſer un plan *l*CL parallele au plan *r*DR*o*, l'interſection L*l* de ce petit cercle avec le grand cercle AR*ar* ſera encore perpendiculaire au rayon AG, & déterminera des arcs AL, A*l* égaux à l'arc AC ; & la projection du point C ſe trouvera dans un point de cette ligne. Elle ſe trouvera auſſi par la même raiſon dans une ligne F*f* qui ſeroit l'interſection du grand cercle AR*ar*, & d'un petit cercle *f*CF perpendiculaire au plan de ce même grand cercle, laquelle ligne F*f* ſeroit auſſi perpendiculaire au rayon BG, & donneroit chacun des arcs BF, B*f* égal à l'arc BC. D'où l'on voit ſur le champ comment on peut déterminer la projection de l'angle C par l'interſection commune des lignes L*l*, F*f* ſur le plan du cercle ABR*a* ; & par la connoiſſance des trois côtés du triangle BAC. *C. Q. F. T. & D.*

COROLLAIRE I.

162. Les triangles D*d*G, C*c*H rectangles étant ſemblables à cauſe des lignes paralleles dont ils ſont formés, on aura DG : CH ou *r*G : *l*H : : *d*G : *c*H ; c'eſt-à-dire,

R : *cos* BAC : : *sin* AC : *c*H. D'ailleurs comme on auroit la même proportion pour tous les points projettés de l'arc AC, il s'enſuit que la projection de ce même arc ſur le plan du cercle ABR*r* eſt une ellipſe dont AG eſt le demi-grand axe, & *d*G le demi-petit axe.

COROLLAIRE II.

163. Il ſuit encore du dernier Corollaire que la projection ortographique d'un cercle quelconque, ou d'une portion de cercle, eſt toujours une ellipſe ou une portion d'ellipſe, dont le demi-grand axe eſt égal au ſinus total, & le demi-petit axe eſt égal au coſinus de l'angle que forment entr'eux ces deux plans.

SCHOLIE.

164. Nous verrons dans le chapitre ſuivant une théorie plus détaillée de la projection ortographique, de ſes applications à la réſolution ſoit graphique, ſoit analytique de tous les cas des triangles ſphériques : ce que nous avons dit ici doit être conſidéré comme un lemme abſolument néceſſaire pour l'intelligence complette du Théorême ſuivant, qui n'aura plus aucune difficulté, ſi l'on a bien conçu les plans dont on a parlé dans la conſtruction du dernier Problême.

THÉOREME III.

165. *Dans un triangle ſphérique quelconque* BAC, *on aura toujours cette proportion : le produit des ſinus des côtés* AB, AC *d'un angle quelconque* BAC, *eſt au produit des ſinus des différences de chacun de ces côtés à la demi-ſomme des trois côtés ; comme le quarré du rayon, eſt au quarré du ſinus de la moitié de l'angle. Ou ce qui revient au même,* $\sin AB \times \sin AC : \sin\left(\frac{AB+AC+BC}{2} - AC\right) \times \sin\left(\frac{AB+AC+BC}{2} - AB\right) :: R^2 : \sin^2\left(\frac{1}{2}BAC\right)$.

Conſtruction néceſſaire à la Démonſtration.

Sur le plan du cercle ABR*a* (*fig.* 17) ſoient pris de part & d'autre du point A les arcs AL, A*l* chacun égal à l'arc AC; & de même de part & d'autre du point B les arcs BF, B*f* chacun égal à l'arc BC; & ſoient tirées les cordes L*l*, F*f* reſpectivement perpendiculaires aux rayons GA & GB. Il eſt évident, par ce qui a été démontré au problême précédent, que l'interſection C de ces cordes ſera la projection de l'angle C du triangle BAC. Il n'eſt pas moins viſible par cette conſtruction que l'on aura BL = AC — AB, & B*l* = AC + AB. On aura auſſi LF = BF ou BC — AC + AB, & *lf* = AB + AC — BC & L*f* = BC + AC — AB. De plus, ſoit encore fait cette proportion H*l* : CH :: G*r* : G*d*; ou ce qui revient au même, ſoit priſe ſur G*r* une partie G*d* quatrieme proportionnelle aux trois lignes H*l*, CH & G*r*, cette ligne ſera le coſinus de l'angle BAC, comme on le voit dans la figure 16. & par conſéquent, ſi par le point *d* on éleve une droite D*d* perpendiculaire au rayon G*r*, cette ligne déterminera l'angle RGD égal au même angle BAC, dont elle eſt le ſinus. Enfin du point D aux extrémités du diametre R*r* ſoient tirées les cordes DR, D*r*; du centre G ſoient abaiſſées ſur ces cordes les perpendiculaires GS, G*s*; & des points *S*, *s* ſoient encore menées les perpendiculaires SV, *su* au diametre R*r*; il eſt viſible par cette conſtruction que RS eſt le ſinus de la moitié de l'angle BAC, & *rs* eſt pareillement le ſinus de la moitié du ſupplément, c'eſt-à-dire, le coſinus de la moité du même angle. Cela poſé, la démonſtration n'a plus aucune difficulté.

DÉMONSTRATION.

Dans le triangle rectiligne CLF, les ſinus des angles étant entr'eux comme les moitiés des côtés qui leur ſont oppoſés; & de plus l'angle LCF étant viſible-

ment égal à l'angle AGB, ſon ſinus ſera celui de l'arc AB, & l'on aura cette proportion : *Sin* C ou *ſin* AB : *ſin* F : : $\frac{1}{2}$LF : $\frac{1}{2}$CL. Et à cauſe des lignes proportionnelles GR, HL ; G*d*, CH, on aura HL : GR : : $\frac{1}{2}$ CL : VR = $\frac{1}{2}$R*d* ; & parce que les lignes GR, RS, RV ſont en proportion continue, on a GR : VR : : GR^2 : RS^2.

Donc en multipliant ces trois proportions par ordre, & effaçant les termes communs aux antécédents & aux conſéquents, on aura *ſin* AB × HL : *ſin* F : : $\frac{1}{2}$ LF × GR^2 : RS^2, ou *ſin* AB × HL : *ſin* F × $\frac{1}{2}$ LF : : GR^2 : RS^2 ; mais HL = *ſin* AC ; *ſin* F = *ſin* $\frac{1}{2}$ L*A*f = *ſin* $\left(\frac{BC+AC-AB}{2}\right)$ = *ſin* $\left(\frac{BC+AC+AB}{2}-AB\right)$, & de même $\frac{1}{2}$ LF = *ſin* $\frac{1}{2}$ LRF = *ſin* $\left(\frac{BC+AB-AC}{2}\right)$ = *ſin* $\left(\frac{BC+AB+AC}{2}-AC\right)$. Donc en ſubſtituant ces valeurs, la dernière proportion deviendra *ſin* AB × *ſin* AC : *ſin* $\left(\frac{BC+AB+AC}{2}-AB\right)$ × *ſin* $\left(\frac{BC+AC+AB}{2}-AC\right)$: : R^2 : *ſin*^{2} $\frac{1}{2}$BAC. *C. Q. F. D.*

THÉOREME IV.

166. Suppoſant la même conſtruction qu'au Théorême précédent, je dis que l'on aura encore cette analogie dans un triangle ſphérique quelconque BAC.

Le produit des ſinus des côtés AB, AC *d'un angle quelconque, eſt au produit du ſinus de la demi-ſomme des deux côtés & du côté oppoſé par le ſinus de la demi-différence des mêmes côtés au troiſieme, comme le quarré du rayon eſt au quarré du coſinus de la moitié de l'angle compris ;* c'eſt-à-dire, que l'on aura *ſin* AB × *ſin* AC : *ſin* $\frac{AC+AB+BC}{2}$ × *ſin* $\frac{AB+AC-BC}{2}$: : R^2 : *coſ*^{2} $\frac{1}{2}$BAC.

DÉMONSTRATION.

Dans le triangle C*lf*, les ſinus des angles ſont entre eux, comme les moitiés des côtés oppoſés : or il eſt

visible que l'angle en f a pour mesure la moitié de l'arc FDl qui est le supplément de la moitié de l'angle FAl, égal à la demi-somme des trois côtés AC, AB, BC. L'arc lf est visiblement égal à AC + AB — BC; ainsi la moitié de sa corde sera le sinus de la moitié de cet arc. Cela posé, on aura, à cause que les sinus sont comme les côtés opposés, sin AB : $sin\ f$ :: $\frac{1}{2}\ lf$: $\frac{1}{2}$ Cl & par construction HL : Gr :: $\frac{1}{2}$ Cl : $ur = \frac{1}{2}\ dr$, & à cause que les lignes Gr, rs, su sont en proportion cont. Gr : ur :: Gr^2 : rs^2. Donc en multipliant par ordre, on aura sin AB × Hl : $sin\ f$ :: $\frac{1}{4}\ lf \times Gr^2 : rs^2$; ou bien sin AB × Hl : $sin\ f \times \frac{1}{2}\ lf$ :: $Gr^2 : rs^2$, & en substituant les valeurs de chaque ligne, Sin AB × sin AC : $sin\ \frac{AB+AC+BC}{2} \times sin\ \frac{AB+AC-BC}{2}$ :: R^2 : $cos^2\ \frac{1}{2}$ BAC. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

167. Donc si l'on nomme s la somme des trois côtés, a le côté opposé à l'angle cherché, b & c les deux côtés qui comprennent l'angle cherché, on aura

$$sin\ \tfrac{1}{2}\text{ angle} = \frac{r \times \sqrt{sin\ (\frac{1}{2}s-b) \times sin\ (\frac{1}{2}s-c)}}{\sqrt{sin\ b \times sin\ c.}};$$

& pareillement

$$cos\ \tfrac{1}{2}\text{ angle} = \frac{r \times \sqrt{sin\ \left(\frac{b+c+a}{2}\right) \times sin\ \left(\frac{b+c-a}{2}\right)}}{\sqrt{sin\ b \times sin\ c.}} =$$

$$\frac{r \times \sqrt{sin\ \frac{1}{2}s \times sin\ (\frac{1}{2}s-a)}}{\sqrt{sin\ b \times sin\ c}}.$$

COROLLAIRE II.

168. Puisque l'on a (n°. 70) $tang\ A = \frac{sin\ A \times r}{cos\ A}$, il s'ensuit qu'on aura aussi pour la tangente du demi-angle

$$tang\ \tfrac{1}{2}\text{ angle} = \frac{r \times \sqrt{sin\ (\frac{1}{2}s-b) \times sin\ (\frac{1}{2}s-c)}}{\sqrt{sin\ \frac{1}{2}s \times (sin\ \frac{1}{2}s-a)}}$$

$$\& cot.\ \tfrac{1}{2}\text{ angle} = \frac{r \times \sqrt{sin\ \frac{1}{2}s \times sin\ (\frac{1}{2}s-a)}}{\sqrt{sin\ (\frac{1}{2}s-b) \times sin\ (\frac{1}{2}s-c)}}.$$

COROLLAIRE III.

169. Puiſque l'on a (n°. 72) $\sin 2A = \frac{\cos A \times 2\sin A}{R}$, il s'enſuit auſſi que l'on aura pour le ſinus de l'angle entier $\sin A = \frac{2r \times \sqrt{\sin \frac{1}{2}s \times \sin(\frac{1}{2}s-a) \times \sin(\frac{1}{2}s-b) \times \sin(\frac{1}{2}s-c)}}{\sin b \times \sin c}$.

Cette formule peut auſſi ſe trouver directement par la comparaiſon des triangles ſemblables lCf; LCF. La formule $\cos 2A = \frac{2\cos^2 A - RR}{\cos A}$ donneroit pour le coſinus de l'arc entier $\cos A = \frac{(2\sin \frac{1}{2}s \times \sin(\frac{1}{2}s-a) - \sin b \times \sin c) \times r}{\sqrt{\sin \frac{1}{2}s \times \sin(\frac{1}{2}s-a) \times \sin b \times \sin c}}$, & diviſant ces deux expreſſions l'une par l'autre, on auroit une expreſſion encore plus compliquée pour celle de la tangente de l'arc entier.

COROLLAIRE IV.

170. Si les côtés qui comprennent l'angle cherché ſont égaux, on aura $\sin \frac{1}{2}\text{angle} = \frac{R \times \sin \frac{1}{2}BC}{\sin AB.}$

& $\cos^2 \frac{1}{2}\text{angle} = \frac{r \times \sqrt{\sin(b+\frac{1}{2}a) \times \sin(b-\frac{1}{2}a)}}{\sin. b}$.

SCHOLIE.

171. On voit par toutes les formules que nous venons de déduire des deux derniers Théorêmes, pourquoi l'on s'eſt arrêté à chercher l'angle d'un triangle dont on connoît les trois côtés par le ſinus ou le coſinus de ſa moitié; puiſque toutes les autres formules ſeroient beaucoup plus difficiles à conſtruire par les logarithmes. On peut cependant employer avec autant de facilité les formules que nous avons données pour les tangentes ou cotangentes de la moitié de l'angle cherché, puiſque ces formules ſont à peu près auſſi ſimples que les deux autres. Ainſi l'on aura quatre moyens de réſoudre ce cas de Trigonométrie.

Néper, *Ougtred*, *Jones* & pluſieurs autres Mathématiciens Anglois, pour conſerver davantage l'analogie qui ſe trouve entre les ſolutions du cas que nous examinons par le ſinus & le coſinus de la moitié de l'angle, ont donné des formules un peu différentes des nôtres, quant à l'expreſſion. Comme elles peuvent ſervir à les faire retenir, nous ajouterons ici ces mêmes formules. Soient *a* & *c* les côtés qui contiennent l'angle cherché dont la ſomme ſoit *s* & la différence *d*; & ſoit *b* le côté oppoſé à ce même angle cherché, que l'on regardera comme la baſe.

On aura *ſinus* $\frac{1}{2}$ angle $= \frac{r \times \sqrt{\text{ſin } \frac{b+d}{2} \times \text{ſin } \frac{b-d}{2}}}{\sqrt{\text{ſin } a \times \text{ſin } c}}$.

& *coſin.* $\frac{1}{2}$ angle $= \frac{r \times \sqrt{\text{ſin } \frac{b+s}{2} \times \text{ſin } \frac{b-s}{2}}}{\sqrt{\text{ſin } a \times \text{ſin } c}}$ ce qui donne

tang $\frac{1}{2}$ angle $= \frac{r \times \sqrt{\text{ſin } \frac{b+d}{2} \times \text{ſin } \frac{b-d}{2}}}{\sqrt{\text{ſin } \frac{b+s}{2} \times \text{ſin } \frac{b-s}{2}}}$.

Pour appliquer toutes ces formules à la trigonométrie rectiligne, il n'y a qu'à faire attention que le ſinus & la tangente ſe confondent avec les côtés mêmes du triangle; & l'on aura en gardant toujours les mêmes dénominations pour les trois côtés du triangle, *ſin* $\frac{1}{2}$ angle $= \frac{r \times \sqrt{(\frac{1}{2}s-b) \times (\frac{1}{2}s-c)}}{\sqrt{bc}}$ & *coſ* $\frac{1}{2}$ angle $= \frac{r \times \sqrt{\frac{1}{2}s \times (\frac{1}{2}s-a)}}{\sqrt{bc}}$ & *tang.* $\frac{1}{2}$ angle $= \frac{r \times \sqrt{(\frac{1}{2}s-b) \times \frac{1}{2}(s-c)}}{\sqrt{\frac{1}{2}s \times (\frac{1}{2}s-a)}}$.

D'où l'on voit qu'en ajoutant aux logarithmes des facteurs des numérateurs de chaque fraction les compléments arithmétiques des facteurs de chaque dénominateur, & prenant la moitié de cette ſomme, on aura l'angle

cherché d'une maniere bien plus ſimple que par les regles ordinaires de la Trigonométrie rectiligne.

On remarquera de plus que la formule trouvée pour le ſinus de A, (n°. 169) nous donne une propriété aſſez remarquable du triangle rectiligne; ſavoir que le ſinus d'un angle quelconque eſt égal au double de la ſurface de ce triangle diviſée par le produit des côtés qui comprennent l'angle cherché. Car on démontre dans tous les éléments de Géométrie que la ſurface d'un triangle $= \sqrt{\frac{1}{2}s \times (\frac{1}{2}s-a) \times (\frac{1}{2}s-b) \times (\frac{1}{2}s-c)}$ ce que devient le numérateur de la formule que nous avons trouvé pour *ſin* A, lorſque le triangle eſt rectiligne.

THÉOREME V.

172. *Dans un triangle ſphérique quelconque* BAC *dont on connoît les trois angles, on aura toujours cette analogie:*

Le produit des ſinus des angles ſur un côté eſt au produit des coſinus des différences de chacun de ces angles ſur ce côté à la demi-ſomme des trois angles, comme le quarré du rayon, eſt au quarré du coſinus de la moitié du côté cherché, c'eſt-à-dire, $\textit{ſin}\, B \times \textit{ſin}\, C : \textit{coſ}\left(\frac{A+B+C}{2}-B\right) \times \textit{coſ}\left(\frac{A+B+C}{2}-C\right) :: R^2 : \textit{coſ}^2 \frac{1}{2} BC$. Et encore cette autre analogie pour un côté quelconque.

Le produit des ſinus des angles adjacents ſur un côté eſt au produit du coſinus de la demi-ſomme de ces deux angles & du troiſieme, par le coſinus de la demi-différence de ces deux angles au troiſieme; comme le quarré du rayon, eſt au quarré du ſinus de la moitié du côté cherché: c'eſt-à-dire, que l'on aura

$\textit{Sin}\, B \times \textit{ſin}\, C : \textit{coſ}\left(\frac{B+C+A}{2}\right) \times \textit{coſ}\left(\frac{B+C-A}{2}\right) :: R^2 : \textit{ſin}^2 \frac{1}{2} BC$.

DÉMONSTRATION.

Dans le triangle DEF (*fig.* 11.) dont toutes les

parties ſont ſuppléments de celles du triangle BAC. (n°. 131). On aura par le Théorême IV.

$$Sin\ ED \times fin\ EF : fin\left(\frac{DF+FE+DE}{2}-DF\right) \times fin\left(\frac{DF+FE+DE}{2}-FE\right) :: R^2 : fin^2 \tfrac{1}{2} DFE.$$

Mais les arcs FD, FE ſont les ſuppléments des angles B & C du triangle BAC, ainſi leurs ſinus ſont les mêmes que ceux des mêmes angles B & C. De même puiſque le ſinus du demi-ſupplément d'un angle ou d'un arc eſt égal au coſinus de cette moitié, on verra, en faiſant les ſubſtitutions convenables au ſecond terme, qu'il deviendra. $Cof.\left(\frac{B+C+A}{2}-B\right) \times cof\left(\frac{B+C+A}{2}-C\right)$. Enfin l'angle DFE étant ſupplément du côté BC, ſa moitié ſera le complément de la moitié du même côté par la même raiſon, & ſon ſinus deviendra le coſinus du demi-côté BC. Ainſi la proportion précédente ſe changera en celle-ci. $Sin\ B \times fin\ C : cof\left(\frac{B+C+A}{2}-B\right) \times cof.\left(\frac{A+B+C}{2}-C\right) :: R^2 : cof^2 \tfrac{1}{2} BC$. *C. Q. F.* 1°, *D.*

2°. Dans le même triangle DEF, on aura par le cinquieme Théorême $fin\ FD \times fin\ FE : fin\left(\frac{DF+FE+DE}{2}\right) \times fin\left(\frac{DF+FE-DE}{2}\right) :: R^2 : cof^2 \tfrac{1}{2} DEF$, faiſant dans cette proportion les ſubſtitutions ſemblables à celles que nous avons fait dans la précédente, on la changera en celle-ci.

$$Sin\ B \times fin\ C : cof.\left(\frac{B+C+A}{2}\right) \times cof\left(\frac{B+C-A}{2}\right) :: R^2 : fin^2 \tfrac{1}{2} BC.$$ *C. Q. F.* 2°, *D.*

COROLLAIRE I.

173. Donc ſi l'on nomme s la ſomme des trois angles d'un triangle ; α, β, γ ces trois angles; en ſuppoſant que les angles β, γ ſont adjacents au côté cherché ; on aura

. *Pour la réſolution de tous les iangles ſphériques rectangles.*

les cas où les parties ſont ſéparées de la moyenne, premier Théorême général de *Neper*. (n. 148).

des Termes cherchés.	*Théorêmes.*	*Cas où les Cherchées ſont moindres que* 90°.
$\frac{\textit{ſin.}\text{ côté don.}}{\textit{ſin.}\text{ hypot.}} \cdot S$	Th. 1.	Si les données ſont de même eſpece.
$= \frac{\textit{tang.}\text{ côté don.}}{\textit{tang.}\text{ hypot.}} \cdot A$ . .	Th. 1.	*Idem.*
$= \frac{\textit{coſin.}\text{ hypot.}}{\textit{coſ.}\text{ côté don.}} \cdot S$ . . .	Th. 1.	Si le côté donné eſt moindre que 90°.
$\frac{\textit{ſin.}\text{ côté don.}}{\textit{ſin.}\text{ ang. don.}} \cdot S$	Th. 1.	Douteux.
$\frac{\textit{tang.}\text{ côté donné.}}{\textit{tang.}\text{ ang. donné.}} \cdot A$ . . .	Th. 4.	Douteux.
$\frac{\textit{coſ.}\text{ angle donné}}{\textit{coſ.}\text{ côté donné}} \cdot S$ . . .	Th. 1.	Douteux.
$\frac{\textit{tang.}\text{ côté donné}}{\textit{coſ.}\text{ angle donné}} \cdot A$ . .	Th. 1.	Si les données ſont de même eſpece.
$\textit{coſ.}$ côté don. $\times$ $\textit{ſin.}$ ang. don. S.	Th. 3.	Si le côté donné eſt moindre que 90°.
$\textit{ſin.}$ côté don. $\times$ $\textit{tang.}$ ang. don. A.	Th. 4.	Si l'angle donné eſt moindre que 90°.
$\textit{tang.}$ hyp. $\times$ $\textit{coſ.}$ angle don. A.	Th. 1.	Si l'angle donné eſt aigu.
$\textit{ſin.}$ hyp. $\times$ $\textit{ſin.}$ angle don. S. .	Th. 1.	Si les données ſont de même eſpece.
$\frac{\textit{cotang.}\text{ angle donné}}{\textit{coſin.}\text{ hypot.}} \cdot A$ . . .	Th. 5.	Si l'hypoténuſe eſt moindre que 90°.
$=$ rectang. $\textit{coſ.}$ côtés donnés S. .	Th. 2.	Si les données ſont de même eſpece.
$\frac{\textit{tang.}\text{ côté oppoſé}}{\textit{ſin.}\text{ côté adjacent.}} \cdot A$ . .	Th. 4.	Si le côté oppoſé eſt aigu.
$=$ rectang. $\textit{cotang.}$ ang. don. A.	Th. 5.	Si les données ſont de même eſpece.
$\frac{\textit{coſ.}\text{ angle oppoſé}}{\textit{ſin.}\text{ ang. adjacent.}} \cdot S$ . .	Th. 3.	Si l'angle oppoſé eſt aigu.

Triangles ſphériques obliquangles.

cond Segment de l'angle ou du côté diviſé par la perpendicu-
Valeurs du Terme demandé.

angles ſont entr'eux comme les *ſin.* des côtés oppoſés.

de ce côté = *coſ.* angle adj. × *tang.* côté donné.
ſin. I ſeg. × *tang.* ang. adj. à ce côté donné
tang. ang. opp. au même côté donne.
cet ang. = *coſin.* côté don. × *tang.* angle adj.
u même ang. = $\frac{\textit{ſin. I ſeg.} \times \textit{coſ.} \text{ ang. opp. au côté don.}}{\textit{coſ.} \text{ angle adj. au côté don.}}$

côtés ſont entr'eux comme ceux des angles oppoſés.

gle cherché = *tang.* angle don. × *coſ.* côté adj.
u même ang. = $\frac{\textit{coſ. I ſeg.} \times \textit{tang.} \text{ côté don. adj. à l'an. don.}}{\textit{tang.} \text{ côté opp. à l'angle don.}}$
de ce côté = *coſ.* angle don. × *tang.* côté adj. à cet angle.
u même côté = $\frac{\textit{coſ. I ſeg.} \times \textit{coſ.} \text{ côté opp. à l'angle don.}}{\textit{coſ.} \text{ côté adj. à l'angle don.}}$

u côté div. = *coſ.* ang. don. × *tang.* côté opp. à l'an. cherché.
erché = $\frac{\textit{tang.} \text{ angle don.} \times \textit{ſin. I ſegment}}{\textit{ſin. II ſegment du côté diviſé.}}$
u côté div. = *coſ.* angle don. × *tang.* côté non coupé.
ché = $\frac{\textit{coſ.} \text{ côté non coupé} \times \textit{coſ. II ſegment}}{\textit{coſ I ſegment du côté diviſé.}}$

l'ang. div. = *coſ.* côté don. × *tang.* ang. opp. au côté cherché
erché = $\frac{\textit{tang.} \text{ côté don.} \times \textit{coſ. I ſeg. angle diviſé.}}{\textit{coſ. II ſeg. du même angle.}}$
g. diviſé = *coſ.* côté don. × *tang.* angle don. non diviſé.
rché = $\frac{\textit{coſ.} \text{ angle non diviſé} \times \textit{ſin. II ſegment.}}{\textit{ſin. I ſegment de l'angle diviſé.}}$

es adjacents à l'angle cherché.
$\frac{r}{\frac{1}{2}s-c}$; *coſ* $\frac{1}{2}$ ang. = $\frac{r \times \sqrt{\textit{ſin.} \frac{1}{2}s \times \textit{ſin.} (\frac{1}{2}s-a)}}{\sqrt{\textit{ſin.} b \times \textit{ſin.} c}}$.

γ les adjacents au côté cherché.
$\frac{r}{\frac{1}{2}s-\alpha}$; *coſ.* $\frac{1}{2}$ côté = $\frac{r \sqrt{\textit{coſ.} (\frac{1}{2}s-\beta) \times \textit{coſ.} (\frac{1}{2}s-\gamma)}}{\sqrt{\textit{ſin.} \beta \times \textit{ſin.} \gamma}}$.

les formules ſuivantes. $Sin\ \frac{1}{2}$ côté $= \frac{r \times \sqrt{cof\ \frac{1}{2}s \times cof(\frac{1}{2}s-a)}}{\sqrt{ſin\ \beta \times ſin\ \gamma}}$.

$cof\ \frac{1}{2}$ côté cherché $= \frac{r \times \sqrt{cof(\frac{1}{2}s-\beta) \times cof\ \frac{1}{2}(s-\gamma)}}{\sqrt{ſin\ \beta \times ſin\ \gamma}}$ &

$tang\ \frac{1}{2}$ côté $= \frac{r \times \sqrt{cof\ \frac{1}{2}s \times cof(\frac{1}{2}s-a)}}{\sqrt{cof(\frac{1}{2}s-\beta) \times cof(\frac{1}{2}s-\gamma)}}$. On trouveroit aiſément des formules pour les ſinus & coſinus, tangentes ou cotangentes du côté cherché tout entier; mais ces expreſſions étant plus compliquées que celles-ci, il ſeroit inutile de s'y arrêter davantage.

COROLLAIRE II.

174. Dans le cas où les deux angles ſur le côté cherché ſeroient égaux, on auroit par la premiere partie du Théorême $ſin^2\ B : cof^2\ \frac{1}{2}A :: R^2 : cof^2\ \frac{1}{2}BC$, & en tirant les racines $cof\ \frac{1}{2}BC = \frac{r \times cof\ \frac{1}{2}A}{ſin\ B}$. La ſeconde partie donneroit une formule moins ſimple que la premiere.

SCHOLIE.

175. Ces Théorêmes renferment la ſolution de tous les cas poſſibles des triangles ſphériques obliquangles, comme il ſera aiſé de s'en convaincre à l'inſpection de la ſeconde table, ſur laquelle nous avons réunies toutes ces ſolutions. Pour donner néanmoins à cette partie toute l'étendue dont elle peut être ſuſceptible; nous ajouterons encore la ſection ſuivante, dans laquelle on trouvera pluſieurs Théorêmes généraux très-intéreſſants, & particuliérement les fameuſes analogies de *Néper*, dans leſquelles ce Géometre avoit eu en vue de ramener la Trigonométrie ſphérique aux mêmes analogies que la Trigonométrie rectiligne. En donnant à ces Théorêmes toute la généralité poſſible, il ſera facile d'obſerver que les analogies de la Trigonométrie rectiligne ne ſont que

des cas particuliers de celles-ci ; auſſi nous aurons ſoin de les déduire chacune en particulier par de ſimples Corollaires. Il eſt étonnant que la plupart des Auteurs Trigonométriques n'aient fait aucune mention de ces analogies* : d'autres les ont données ſans démonſtration, & M. *Volf* en particulier les a défigurées, en leur ſubſtituant des proportions qui ne ſont pas celles de *Néper*. Ces analogies pourront encore être très-utiles, en ce qu'elles contribueront à retenir aiſément les ſolutions de tous les cas poſſibles des triangles obliquangles, ſoit ſphériques ſoit rectilignes.

SECTION QUATRIEME.

Démonſtration des Analogies de Néper, *& des autres Analogies moins communes des Triangles ſphériques & rectilignes.*

THÉOREME I.

176. SI d'un angle quelconque A d'un triangle ſphérique obliquangle BAC, (fig. 15.) on abaiſſe une perpendiculaire AD ſur la baſe BC prolongée, s'il eſt néceſſaire, on aura toujours cette analogie ;

La tangente de la moitié de la baſe eſt à la tangente de la demi-ſomme des côtés, comme la tangente de la demi-différence des mêmes côtés, eſt à la tangente de la demi-différence ou de la demi-ſomme des ſegments de la baſe formés par la perpendiculaire ; ſuivant qu'elle tombe au dedans ou au dehors du triangle, c'eſt-à-dire, que l'on aura $tang \frac{1}{2} BC : tang \frac{AB+AC}{2} :: tang \frac{AB-AC}{2} : tang \frac{BD \mp DC}{2}$.

DÉMONSTRATION.

L'on a vu (art. 152). que l'on a *cos* BD : *cos* CD : : *cos* AB : *cos* AC, donc on aura auſſi *addendo* & *detrahendo*, *cos* BD + *cos* CD : *cos* BD — *cos* CD : : *cos* AB + *cos* AC : *cos* AB — *cos* AC. Mais (n°. 101.) *cos* BD + *cos* CD : *cos* BD — *cos* CD : : *cot* $\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$: *tang* $\left(\frac{BD+CD}{2}\right)$, & par la même raiſon *cos* AB + *cos* AC : *cos* AB — *cos* AC : : *cot* $\left(\frac{AB-AC}{2}\right)$: *tang* $\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$.

Donc puiſque les premiers rapports de ces deux proportions ſont égaux, les ſeconds le ſeront auſſi, & donneront cette proportion *cot* $\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$: *tang* $\left(\frac{BD+CD}{2}\right)$: : *cot* $\left(\frac{AB-AC}{2}\right)$: *tang* $\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$. Ce qui donne pour le produit des extrêmes & des moyens, après avoir ſubſtitué les tangentes aux cotangentes $\frac{tang\left(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC\right)}{tang\left(\frac{1}{2}BD-\frac{1}{2}CD\right)} = \frac{tang\left(\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}CD\right)}{tang\left(\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}AC\right)}$.

Si la perpendiculaire tombe au dedans du triangle $\frac{BD+CD}{2} = \frac{BC}{2}$ & ſi elle tombe au dehors $\frac{BD-CD}{2} = \frac{BC}{2}$; ſubſtituant ces différentes expreſſions ſelon le cas qui doit avoir lieu : la derniere égalité réduite en proportion donnera

Tang $\frac{1}{2}$ BC : *tang* $\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$: : *tang* $\left(\frac{AB-AC}{2}\right)$: *tang* $\left(\frac{BD\mp DC}{2}\right)$. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

177. On voit aiſément qu'en ſuppoſant le triangle rectiligne ; comme alors les tangentes ſe confondent avec les côtés, on aura cette proportion :

La baſe du triangle eſt à la ſomme des deux côtés, comme la différence des mêmes côtés eſt à la différence ou à la ſomme des ſegments formés par la perpendiculaire abaiſſée ſur cette baſe, ſelon que cette perpendiculaire tombe au dedans ou au dehors du triangle.

On voit de plus que pour les triangles ſphériques ou rectilignes, cette formule a lieu dans le cas où l'on connoît les trois côtés, en réduiſant d'abord le triangle en deux triangles rectangles dans chacun deſquels on connoîtra, outre l'angle droit, l'hypoténuſe & un côté. Mais les formules des art. 165 & 166 doivent toujours être préférées dans ces cas, ſoit pour les triangles ſphériques ſoit pour les triangles rectilignes, parce qu'elles ſe conſtruiſent encore plus aiſément.

THÉOREME II.

173. Suppoſant toujours que d'un angle quelconque A d'un triangle ſphérique BAC, l'on ait abaiſſé une perpendiculaire AD, je dis que l'on aura toujours les deux proportions ſuivantes: (*fig.* 15.)

1°. *Le ſinus de la ſomme des angles ſur un côté eſt au ſinus de leur différence, comme la tangente ou cotangente du demi-côté adjacent à ces angles eſt à la tangente de la demi-différence, ou à la cotangente de la demi-ſomme des ſegments formés par cette perpendiculaire*; c'eſt-à-dire, que l'on aura cette analogie.

$$\textit{Sin}\,(B+C) : \textit{ſin}\,(B-C) :: \textit{tang ou cot}\,\tfrac{1}{2}BC : \textit{tang ou cotang}\left(\frac{BD \mp CD}{2}\right).$$

2°. *Le ſinus de la ſomme des côtés eſt au ſinus de leur différence, comme la cotangente du demi-angle compris entre ces côtés eſt à la tangente de la demi-ſomme, ou de la demi-différence des ſegments de cet angle*; c'eſt-à-dire, que l'on aura $\textit{ſin}\,(AB+AC) : \textit{ſin}\,(AB-AC) :: \textit{cotang}\,\tfrac{1}{2}BAC : \textit{tang}\,(\tfrac{1}{2}BAD \mp \tfrac{1}{2}CAD)$.

DÉMONSTRATION.

Dans le triangle BAC l'on a (n°. 159. art. 3°.) *tang* B : *tang* C : : *fin* CD : *fin* BD ; donc on aura *addendo* & *detrahendo*, *tang* B + *tang* C : *tang* B — *tang* C : : *fin* CD + *fin* BD : *fin* CD — *fin* BD ; mais le premier rapport eſt égal à celui de *fin* (B + C) à *fin* (B — C) (n°. 88), & le ſecond rapport eſt égal à celui de *tang* $\left(\frac{BD+CD}{2}\right)$ à *tang* $\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$ (n°. 96). Donc en ſubſtituant ces rapports aux précédents, & mettant *tang* $\frac{1}{2}$ BC à la place de *tang* $\left(\frac{BD+CD}{2}\right)$, lorſque la perpendiculaire tombe au dedans, & *tang* $\frac{1}{2}$ BC à la place de *tang* $\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$, lorſqu'elle tombe au dehors ; l'on aura pour les deux cas. *Sin* (B + C) : *ſin* (B — C) : : *tang* $(\frac{1}{2}$BC$)$: *tang* $\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$: : *tang* $\left(\frac{BD+CD}{2}\right)$: *tang* $(\frac{1}{2}$BC$)$: : *cot* $\frac{1}{2}$ BC : *cot* $\left(\frac{BD+CD}{2}\right)$ *C. Q. F.* 1°. *D.*

2°. Dans le même triangle on aura encore par le ſecond article du même n°. 159) *tang* AB : *tang* AC : : *cof* CAD : *cof* BAD ; donc *addendo* & *detrahendo* *tang* AB + *tang* AC : *tang* AB — *tang* AC : : *cof* CAD + *cof* BAD : *cof* CAD — *cof* BAD, mais (art. 96) le premier rapport eſt égal à celui de *ſin* (AB + AC) à *ſin* (AB — AC) & (n°. 101.) le ſecond eſt égal à celui de *cot* $\left(\frac{BAD-CAD}{2}\right)$ à *tang* $\left(\frac{BAD+CAD}{2}\right)$. Donc en ſubſtituant ces rapports aux précédents, & mettant $\frac{1}{2}$ BAC à la place de $\frac{BAD+CAD}{2}$, lorſque la perpendiculaire tombe au dedans du triangle, & $\frac{1}{2}$ BAC à la place de $\frac{BAD-CAD}{2}$; lorſqu'elle tombe au dehors, on aura pour les deux cas :

Sin (AB + AC) : *ſin* (AB − AC) : : *cot* ½ BAC : *tang* (½ BAD ∓ ½ CAD). *C. Q. F.* 2°. *D.*

SCHOLIE.

179. On voit aiſément que la premiere partie du Théorême ſert à réſoudre un triangle ſphérique, dans lequel on connoît un côté & les deux angles adjacents; en le réduiſant d'abord à deux triangles rectangles dans chacun deſquels on connoîtra un côté & l'angle adjacent.

Cette premiere partie ſerviroit au même uſage dans un triangle rectiligne; mais elle devient inutile pour la réſolution des côtés du triangle qui ſe trouvent plus aiſément par l'analogie connue entre les ſinus des angles & les côtés oppoſés. Le ſeul cas où ce Théorême peut être d'uſage dans la Trigonométrie rectiligne, ſeroit celui où l'on voudroit trouver les ſegments de la baſe. En ſuppoſant que cette baſe eſt connue & les deux angles adjacents; alors pour avoir les ſegments de la baſe, on feroit cette analogie. *Le ſinus de la ſomme des angles ſur cette baſe eſt au ſinus de leur différence, comme la moitié de la baſe eſt à la demi-différence ou à la demi-ſomme des ſegments de cette baſe*, ſelon que la perpendiculaire tombe au dedans ou au dehors.

La ſeconde partie du même Théorême a lieu dans le cas où l'on connoît deux côtés & l'angle compris; & ſert encore à réſoudre le triangle en deux triangles rectangles, dans chacun deſquels on connoîtra l'hypoténuſe & l'angle adjacent. Ce même cas peut auſſi s'appliquer au cas ſemblable des triangles rectilignes, & fait trouver les ſegments de l'angle vertical, en ſubſtituant AB + AC & AB — AC au ſinus de ces mêmes quantités. La regle ordinaire n'eſt gueres plus ſimple que celle-ci.

THÉOREME III.

180. Je dis de plus que l'on aura toujours les deux proportions ſuivantes dans un triangle ſphérique quelconque BAC. 1°. Le

1°. *Le ſinus de la demi-ſomme des côtés eſt au ſinus de leur demi-différence, comme la tangente du demi-côté adjacent à ces angles eſt à la tangente de la demi-différence des côtés oppoſés*, ou, ce qui revient au même, $\mathit{ſin}\left(\frac{C+B}{2}\right) : \mathit{ſin}\left(\frac{C-B}{2}\right) :: \mathit{tang}\,\frac{1}{2}BC : \mathit{tang}\left(\frac{AB-AC}{2}\right)$.

2°. *Le coſinus de la demi-ſomme des angles ſur un côté eſt au coſinus de la demi-différence des mêmes angles, comme la tangente du demi-côté adjacent eſt à la tangente de la demi-ſomme des côtés* ou bien $\mathit{coſ}\left(\frac{C+B}{2}\right) : \mathit{coſ}\left(\frac{C-B}{2}\right) :: \mathit{tang}\,\frac{1}{2}BC : \mathit{tang}\left(\frac{AC+AB}{2}\right)$.

Démonstration.

Nous avons vu au Théorême ſecond que $\mathit{ſin}\,(C+B) : \mathit{ſin}\,(C-B) :: \mathit{tang}\,\frac{1}{2}BC : \mathit{tang}\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$. Mais $C+B = 2\left(\frac{C+B}{2}\right)$ & $C-B = 2\left(\frac{C-B}{2}\right)$. D'ailleurs par la formule $\mathit{ſin}\,2A = \mathit{ſin}A \times 2\mathit{coſ}\,A$ (n°.72) on aura $\mathit{ſin}\,(C+B) = 2\mathit{ſin}\left(\frac{C+B}{2}\right) \times \mathit{coſ}\left(\frac{C+B}{2}\right)$, & de même pour $\mathit{ſin}$ de $C-B$, ce qui changera notre premiere proportion dans la ſuivante, après avoir diviſé le premier rapport par 2; $\mathit{ſin}\left(\frac{C+B}{2}\right) \times \mathit{coſ}\left(\frac{C+B}{2}\right) : \mathit{ſin}\left(\frac{C-B}{2}\right) \times \mathit{coſ}\left(\frac{C-B}{2}\right) :: \mathit{tang}\,\frac{1}{2}BC : \mathit{tang}\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$. De plus à cauſe que dans un triangle ſphérique quelconque les ſinus des angles ſont entr'eux comme les ſinus des côtés oppoſés, on aura $\mathit{ſin}\,C : \mathit{ſin}\,B :: \mathit{ſin}\,AB : \mathit{ſin}\,AC$; donc *addendo* & *detrahendo* $\mathit{ſin}\,C + \mathit{ſin}\,B : \mathit{ſin}\,C - \mathit{ſin}\,B :: \mathit{ſin}\,AB + \mathit{ſin}AC : \mathit{ſin}\,AB - \mathit{ſin}\,AC$. Préſentement ſi l'on ſubſtitue à ces rapports leurs égaux indiqués aux art. 92, 93 & 96, la proportion deviendra celle-ci.

$Sin\left(\frac{C+B}{2}\right) \times cof\left(\frac{C-B}{2}\right) : cof\left(\frac{C+B}{2}\right) \times fin\left(\frac{C-B}{2}\right)$: : $tang\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$: $tang\left(\frac{AB-AC}{2}\right)$.

Multipliant cette proportion par celle que nous avons trouvée plus haut, on trouvera après avoir effacé ce qui se détruit.

$Sin^2\left(\frac{C+B}{2}\right)$: $fin^2\left(\frac{C-B}{2}\right)$: : $tang\ \frac{1}{2}$ BC × $tang\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$: $tang\left(\frac{BD-CD}{2}\right) \times tang\left(\frac{AB-AC}{2}\right)$. Enfin si l'on multiplie les antécédents de la proportion alterne du premier Théorême par $tang\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$ & les conséquents par $tang\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$, on trouvera cette derniere proportion $tang\ \frac{1}{2}$ BC × $tang\left(\frac{AB+AC}{2}\right) : tang \times \left(\frac{BD-CD}{2}\right) \times tang\left(\frac{AB-AC}{2}\right)$: : $tang^2\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$ :: $tang^2\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$. Donc puisque cette proportion & l'avant derniere ont un même rapport ; en concluant du premier au dernier, on trouvera cette analogie.

$Sin^2\left(\frac{C+B}{2}\right)$: $fin^2\left(\frac{C-B}{2}\right)$: : $tang^2\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$: $tang^2\left(\frac{BD-CD}{2}\right)$; & tirant les racines $fin\left(\frac{C+B}{2}\right) : fin\left(\frac{C-B}{2}\right)$: : $tang\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$: $tang\left(\frac{BD-AD}{2}\right)$: : $tang\ \frac{1}{2}$ BC : $tang\left(\frac{AB-AC}{2}\right)$, par le même Théorême premier ; d'où suit évidemment la vérité de la premiere partie du Théorême.

On prouveroit par un calcul semblable que $cof\left(\frac{C+B}{2}\right) : cof\left(\frac{C-B}{2}\right)$: : $tang\ \frac{1}{2}$ BC : $tang\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$; toute l'adresse du calcul se réduiroit à disposer les deux

proportions que nous avons multipliées l'une par l'autre, de maniere qu'on eût les quarrés des cosinus des quantités C + B & C — B. Ce qui ne souffre aucune difficulté, d'où suit la vérité du fameux Théorême de *Néper* dans l'un & l'autre cas. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

181. Il est aisé de voir que ce Théorême sert à trouver en même temps les deux côtés d'un triangle sphérique quelconque, dans lequel on connoît les deux angles sur la base aussi connue. Il serviroit pareillement à résoudre le même cas de la Trigonométrie rectiligne, en substituant la base & la somme, ou la différence des côtés, à la place des tangentes de ces quantités. On remarquera de plus que notre démonstration amene encore deux Théorêmes qui méritent quelque attention.

Le premier peut s'énoncer ainsi.

Dans un triangle sphérique quelconque, le sinus de la demi-somme des angles est au sinus de leur demi-différence; comme la tangente de la demi-somme des côtés opposés est à la tangente de la demi-différence des segments de la base.

Et le second par cette autre analogie.

Le cosinus de la demi-somme des angles sur la base est au cosinus de la demi-différence des mêmes angles, comme la tangente de la demi-différence des côtés opposés est à la tangente de la demi-différence des mêmes segments de la base.

Il suit encore du Théorême, & de ce que dans un triangle rectiligne la somme des trois angles est égale à deux droits, que l'on aura ces deux analogies générales.

1°. *Le sinus du demi-angle vertical est au cosinus de la demi-somme ou de la demi-différence des angles; comme la base ou le côté opposé d'cet angle est à la différence ou à la somme des deux autres côtés;* c'est-à-dire que *sin* $\frac{1}{2}$ A : *cos* $\left(\frac{C \pm B}{2}\right)$ :: BC : AB $\mp$ AC.

2°. *Le cosinus du demi-angle vertical est au sinus de la demi-somme, ou de la demi-différence des angles opposés; comme la base est à la somme, ou à la différence des côtés opposés* : c'est-à-dire que $cos \frac{1}{2} A : sin \left(\frac{C-B}{2}\right) :: BC : AB + AC$.

Enfin les deux analogies que nous a donné la démonstration de ce Théorême, donneront cette double analogie pour un triangle rectiligne quelconque, dans lequel on considere les segments de la base.

La somme ou la différence des côtés est à la différence des segments de la base, comme le cosinus ou le sinus du demi-angle vertical est au sinus ou au cosinus de la demi-différence des angles sur cette base ; c'est-à-dire que l'on aura

$AB + AC : BD - CD :: cos$ ou $sin \frac{1}{2} A : sin$ ou $cos \left(\frac{C-B}{2}\right)$.

THÉOREME IV.

182. Dans tout triangle sphérique BAC, on aura toujours ces deux analogies.

1°. *Le sinus de la demi-somme des côtés qui comprennent un angle, est au sinus de leur demi-différence, comme la cotangente de la moitié de l'angle compris entre les côtés est à la tangente de la demi-différence des deux autres angles ou*

$Sin \left(\frac{AB+AC}{2}\right) : sin \left(\frac{AB-AC}{2}\right) :: cot \frac{1}{2} BAC : tang \left(\frac{C-B}{2}\right)$.

2°. *Le cosinus de la demi-somme des côtés est au cosinus de leur demi-différence, comme la cotangente du demi-angle compris entre les côtés est à la tangente de la demi-somme des angles opposés* ; c'est-à-dire que

$cos \left(\frac{AB+AC}{2}\right) : cos \left(\frac{AB-AC}{2}\right) :: cot \frac{1}{2} BAC : tang \left(\frac{C+B}{2}\right)$.

DÉMONSTRATION.

Dans le triangle DEF dont toutes les parties ſont ſupplément de celles du triangle BAC, on aura par le Théorême précédent $\mathit{ſin}\left(\frac{E+D}{2}\right) : \mathit{ſin}\left(\frac{E-D}{2}\right) :: \mathit{tang}\ \frac{1}{2}$ DE : $\mathit{tang}\left(\frac{FD-FE}{2}\right)$. Pour découvrir ce que cette analogie devient au triangle BAC; ſoient a & b deux arcs de cercle qui repréſenteront, ſi l'on veut, les angles E & D; & ſoit $2r = 180°$. Les ſuppléments de ces angles a & b ſeront $2r - a$ & $2r - b$; & la demi-ſomme de ces ſuppléments ſera $2r - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$, c'eſt-à-dire, le ſupplément de la demi-ſomme de ces angles a & b. Donc $\mathit{ſin}\left(\frac{E+D}{2}\right) = \mathit{ſin}\left(\frac{AB+AC}{2}\right)$. On fera voir de même que $\mathit{ſin}\left(\frac{E-D}{2}\right) = \mathit{ſin}\left(\frac{AB-AC}{2}\right)$; enfin parce que $\mathit{tang}\ \frac{1}{2}$ ſupplément $= \mathit{tang}$ complément de la moitié, on aura $\mathit{tang}\ \frac{1}{2}$ DE $= \mathit{cot}\ \frac{1}{2}$ BAC, & $\mathit{tang}\ \frac{FD-FE}{2} = \mathit{tang}\left(\frac{C-B}{2}\right)$. C. Q. F. 1°. D.

L'on démontreroit préciſément de la même maniere que la proportion $\mathit{coſ}\left(\frac{E+D}{2}\right) : \mathit{coſ}\left(\frac{E-D}{2}\right) : : \mathit{tang}\ \frac{1}{2}$ DE : $\mathit{tang}\left(\frac{DF+FE}{2}\right)$ ſe changeroit pareillement en celle-ci $\mathit{coſ}\left(\frac{AB+AC}{2}\right) : \mathit{coſ}\ \frac{AB-AC}{2} : : \mathit{cot}\ \frac{1}{2}$ BAC ; $\mathit{tang}\left(\frac{C+B}{2}\right)$. C. Q. F. 2°. D.

SCHOLIE.

183. On voit à la ſeule inſpection de ces deux analogies qu'elles ſervent à trouver en même temps les deux angles d'un triangle ſphérique quelconque, dans lequel on connoît les deux côtés & l'angle compris. On

voit de plus que la premiere analogie appliquée aux triangles rectilignes dans le cas ſemblable, donne l'analogie ordinaire.

La ſomme des côtés eſt à leur différence, comme la tangente du demi-angle compris entre ces côtés eſt à la tangente de la demi-différence des angles oppoſés. Enfin l'on voit auſſi que la ſeconde analogie n'a pas lieu dans les triangles rectilignes, parce que *cot* $\frac{1}{2}$ BAC devient égale à *tang* $\left(\frac{C+B}{2}\right)$, à cauſe que dans ces triangles la ſomme des trois angles vaut néceſſairement deux angles droits; ce qui ne peut avoir lieu pour les triangles ſphériques. On pourroit encore ajouter ici des Théorêmes ſemblables à ceux qui ſont énoncés dans les analogies du dernier Scholie; je laiſſe aux Commençants le plaiſir de les trouver eux-mêmes.

ution de tous les cas poſſibles des Triangles
ues obliquangles.

ÉPER, démontrées *page 76 & ſuiv.*

Valeurs du Terme demandé.

des angles $=\frac{\textit{cot.}\ \frac{1}{2}\text{ angle donné} \times \textit{ſin.}\ \frac{1}{2}\text{ différ. des côtés donnés}}{\textit{ſin.}\text{ demi-ſomme des mêmes côtés}}$.

des angles $=\frac{\textit{cot.}\ \frac{1}{2}\text{ angle} \times \textit{coſ.}\text{ demi-différence des côtés}}{\textit{coſ.}\text{ demi-ſomme des côtés}}$.

nmune ; les *ſinus* des côtés : : les *ſinus* des angles oppoſés.

ord par l'analogie commune ;
: : les *ſinus* des angles oppoſés.
noitié $=\frac{\textit{tang.}\text{ demi-différ. des angles} \times \textit{ſin.}\text{ demi-ſom. côtés donnés}}{\textit{ſin.}\text{ demi-différence des côtés donnés}}$.
n. des angles opp. aux côtés donn. × *coſ.* demi-ſom. des côtés donn.
coſin. demi-différence des mêmes côtés donnés.
nmune.

des côtés $=\frac{\textit{tang.}\ \frac{1}{2}\text{ côté donné} \times \textit{ſin.}\ \frac{1}{2}\text{ différ. des angles donnés}}{\textit{ſin.}\ \frac{1}{2}\text{ ſomme des angles donnés}}$.

les côtés $=\frac{\textit{tang.}\ \frac{1}{2}\text{ côté donné} \times \textit{coſ.}\ \frac{1}{2}\text{ différ. des angles donnés}}{\textit{coſ.}\ \frac{1}{2}\text{ ſomme des angles donnés}}$.

nmune ; les *ſinus* des angles : : les *ſinus* des côtés oppoſés.

ord par l'analogie commune ;
ſin. des côtés oppoſés.
$=\frac{\textit{ſin.}\ \frac{1}{2}\text{ ſom. angles op. aux côtés don.} \times \textit{tang.}\ \frac{1}{2}\text{ diff. côtés donnés}}{\textit{ſin.}\ \frac{1}{2}\text{ différ. ang. opp. aux côtés donnés}}$.
des angles oppoſés aux côtés donnés × *tang.* $\frac{1}{2}$ ſomme des côtés
coſ. $\frac{1}{2}$ différ. des angles oppoſés aux côtés donnés
nmune.

erpendiculaire ſur le côté adjacent à l'angle cherché.
e ou demi- } $=\frac{\textit{tang.}\ \frac{1}{2}\text{ ſomme} \times \textit{tang.}\ \frac{1}{2}\text{ différ. côtés}}{\textit{tang.}\ \frac{1}{2}\text{ baſe}}$.
de la baſe. }
$=$ *tang.* ſeg. adj. × *cotang.* côté adjacent.

erchant un angle quelconque du triangle, dont toutes les parties
ent de celles du Triangle dont les trois angles ſont donnés.

CHAPITRE TROISIEME.

De la Réſolution Graphique ou Géométrique des Triangles ſphériques quelconques.

Obſervation ſur la nature de ces Solutions.

184. LES GÉOMETRES font ordinairement peu de cas des Solutions Graphiques ou Géométriques, ſurtout depuis l'invention des Logarithmes; attendu la ſimplicité dont les ſolutions numériques ſont devenues ſuſceptibles par ce moyen; & qu'on obtient d'ailleurs une préciſion beaucoup plus grande, parce que dans les conſtructions dont nous parlons, cette préciſion dépend à la fois de l'adreſſe de celui qui conſtruit, & de la bonté des inſtruments avec leſquels il opere. J'aurois donc ſupprimé cette partie ſans les conſidérations ſuivantes.

1°. Les ſolutions Géométriques quoique peu exactes pour les raiſons qu'on vient d'expoſer, n'en ſont pas moins rigoureuſes aux yeux de l'eſprit, étant appuyées ſur les vérités les plus connues de la Géometrie. 2°. Il eſt des cas où l'on n'a pas beſoin de toute la préciſion du calcul; comme lorſqu'il s'agit d'orienter un plan ou une allée par quelques obſervations faites à la hâte, ce qui peut avoir lieu aſſez ſouvent dans la Gnomonique, pour ſe guider à une opération plus parfaite; ces opérations étant d'ailleurs très-commodes par la facilité de les pratiquer. 3°. Il y a dans l'Aſtronomie des Théories fondées ſur ces ſolutions: on peut les employer avec ſuccès dans certaines pratiques du pilotage. Enfin elles peuvent

guider dans un calcul où l'on craindroit de ſe tromper ; & ſi l'on y applique l'analyſe algébrique, on découvre un très-grand nombre de nouvelles ſolutions qui éclairent cette partie, & conduiſent à des ſolutions très-élégantes d'Aſtronomie pratique, leſquelles ſeroient devenues très-compliquées par d'autres méthodes ; comme nous tâcherons de le prouver par des applications à différents Problêmes. Ces formules comparées avec les ſolutions ſynthétiques font voir des différences remarquables entre la ſyntheſe & l'analyſe ; elles ſervent à exercer les Commençants ſur cette partie, en leur donnant le moyen de trouver des ſolutions déduites des conſidérations Géométriques. J'ajouterai encore que ces formules ſe trouvent démontrées d'une maniere bien plus ſimple & bien plus élégante, lorſque les calculs ſont appuyés ſur une conſtruction Géométrique que par des ſubſtitutions purement algébriques ; ce que l'on reconnoîtra aiſément, ſi l'on compare mes ſolutions avec celles que M. de la Caille a donné des mêmes formules.

PROBLEME I.

185. *Connoiſſant les deux côtés* AB, AC (fig. 17.) *d'un triangle ſphérique* BAC *& l'angle* A *qu'ils comprennent ; trouver* 1°, *un des angles ſur la baſe* ; 2°, *cette baſe ou le troiſieme côté* BC.

SOLUTION.

Sur le plan du cercle ABRD*r* (fig. 17) ſoit pris l'arc AB égal à l'un des côtés donnés de l'angle BAC ; & ſoient tirés au centre G les rayons AG & BG, par lequel ſoit encore mené le diametre *r* G R perpendiculaire au rayon AG ; ſoient auſſi pris de part & d'autre du point A les arcs AL, A*l* chacun égal au côté donné AC, & ſoit tirée par les extrémités de ces arcs la corde L*l*. Soit de plus fait au centre G l'angle DGR égal à l'angle donné BAC ; enfin ayant abaiſſé du point D la perpendiculaire D*d* au

diametre Rr, ſi l'on prend CH quatrieme proportionnelle aux lignes *r*G, *d*G, *l*H, le point C ſera, comme on l'a vu (n°. 161) la projection de l'angle C. Cela poſé, pour avoir l'un des angles, B par exemple; du point trouvé C on menera au rayon GB la perpendiculaire *f*CXF; enſuite ayant mené le diametre MG*m* perpendiculaire au rayon GB, l'on fera X*f* : XC :: GM : G*n*; par le point *n* ainſi déterminé, l'on menera la ligne *n*N perpendiculaire à GM & terminée à la circonférence en N, l'arc MN ſera la meſure de l'angle B. L'angle C ſe trouveroit, par une opération abſolument ſemblable, en prenant AC ſur le plan du cercle ABR*a* au lieu de l'arc AB. *C. Q. F.* 1°. *T.*

2°. Pour avoir le troiſieme côté BC, il eſt viſible qu'il eſt égal à l'un des arcs BF ou B*f*; puiſque les arcs B*f*, BC, BF ſont tous d'un même nombre de degrés étant tous compris entre le même point B & un petit cercle perpendiculaire au rayon GB. *C. Q. F.* 2°. *T.*

PREMIER SCHOLIE.

186. La démonſtration de cette conſtruction eſt une ſuite évidente de la nature de la projection dont on ſe ſert ici, & que nous avons déja expliqué au n°. 161. Si l'on ne veut pas recommencer l'opération pour trouver l'angle C, on pourra le découvrir aiſément de la maniere ſuivante que nous ne ferons qu'indiquer, pour ne point trop multiplier les figures. Par les extrémités L, F des arcs AL, BF reſpectivement égaux aux côtés AC & BC, l'on menera les tangentes de ces arcs terminées aux rayons AG & BG prolongés autant qu'il ſera néceſſaire. De ces points comme centre avec les mêmes tangentes comme rayons, l'on décrira deux arcs de cercle qui ſe couperont en un point duquel on tirera à ces mêmes centres les rayons qui feront entr'eux un angle égal à l'angle C. Cette conſtruction eſt une ſuite évidente de ce que l'angle de deux plans eſt le même que celui qui

eſt formé par deux lignes perpendiculaires à l'interſection commune, comme le ſont ici les tangentes des arcs AC & BC.

SECOND SCHOLIE.

187. Ayant pris comme ci-devant les arcs AL, A*l* chacun égal au côté AC, on peut encore trouver la projection de l'angle C de la maniere ſuivante, ſans employer les proportionnelles. Pour cela du point H comme centre avec le rayon HL, on décrira un demi-cercle L*cl*; au même point H avec le rayon HL, on fera un angle LH*c* égal à l'angle donné BAC; & du point *c* où le rayon H*c* coupe la circonférence, on abaiſſera la perpendiculaire *c*C au diametre *l*L, & le point C ſera la projection cherchée de l'angle C du triangle BAC. Si l'angle en A eſt obtus, le point C tombera ſur H*l*; s'il eſt aigu, le même point tombera ſur HL : on peut auſſi trouver l'angle B avec la même facilité en prenant C*x* = CX ſur la ligne *l*H prolongée s'il eſt néceſſaire; & tirant du point *c* au point *x* la ligne *cx* qui donnera l'angle *cx*L ou *cxl* égal à l'angle ABC.

Pour concevoir la raiſon de cette conſtruction, il ſuffira de jetter les yeux ſur la figure 16, dans laquelle on voit que l'angle CHL eſt égal à l'angle BAC, puiſque les lignes CH & HL ſont toutes deux perpendiculaires à l'interſection commune AG des plans GAB, GAC; ainſi l'angle *c*HL eſt le même que l'angle CHL. De même on voit auſſi que dans le triangle CX*c* rectangle en *c*, les lignes *c*X & CX étant toutes deux perpendiculaires à l'interſection GB des plans BGC, BGA, l'angle qu'elles forment entr'elles, eſt le même que l'angle ABC. Or par notre conſtruction le triangle rectangle *c*C*x* de la figure 17 eſt parfaitement égal au triangle C*c*X de la figure 16; donc l'angle *x* eſt auſſi égal de part & d'autre.

TROISIEME SCHOLIE.

188. En conſidérant la figure 17 avec attention, on remarquera qu'un triangle quelconque ABC en détermine trois autres que l'on peut regarder comme ſes correſpondants; ſavoir *ba*C, B*a*C, *b*AC; chacun deſquels a toujours un angle commun ou égal à l'un des angles du triangle BAC, & deux angles ſuppléments des deux autres du même triangle; ainſi que deux côtés ſuppléments de ceux de même dénomination avec un côté égal, ſavoir celui qui eſt oppoſé à l'angle égal.

Ces triangles renferment toutes les variétés dont le problême peut être ſuſceptible à l'égard des données; & pour mieux entendre la conſtruction de chaque cas particulier, on peut s'exercer à appliquer chaque ſolution à chacun de ces triangles.

PROBLEME II.

189. *Connoiſſant dans un triangle ſphérique quelconque* BAC *deux angles* A *&* B *avec le côté adjacent* AB, *trouver* 1°, *les deux autres côtés*; 2°, *le troiſieme angle.*

SOLUTION.

Ayant pris ſur le cercle ARD*r* (*fig.* 17) l'arc AB égal au côté donné, & tiré au centre G les rayons AG & BG; on élevera les lignes G*r*, GM reſpectivement perpendiculaires à ces mêmes rayons: on prendra enſuite les arcs MN, RD reſpectivement égaux aux angles en B & en A; puis après avoir tiré les ſinus N*n*, D*d*; avec les demi-axes GB, G*n*; GA, G*d*, on tracera les demi-ellipſes B*nb*, A*da*, leſquelles ſe couperont dans un point C qui ſera la projection de l'angle C du triangle ſphérique BAC. Par ce point C on menera les cordes *l*CL, *f*CF perpendiculaires aux rayons GA & GB, ce qui donnera les arcs AL, A*l* égaux au côté AC, & les arcs BF, B*f* égaux au côté BC. *C. Q. F.* 1°. *T.*

2°. Connoiſſant les côtés AC & BC, on déterminera l'angle C par l'une ou l'autre des ſolutions indiquées au problême précédent. *C. Q. F.* 2°. *T.*

PROBLEME III.

190. *Connoiſſant deux côtés quelconques* AB, AC *d'un triangle* BAC *& l'un des angles oppoſés à ces côtés, trouver* 1°, *le troiſieme côté;* 2°, *les deux autres angles.*

PREMIERE SOLUTION.

Suppoſons que les côtés connus ſont AB, AC avec l'angle B; & de plus que l'on ſait de quelle eſpece eſt l'angle A compris entre ces côtés connus. On prendra d'abord ſur le plan du cercle ARBr un arc AB égal au côté donné AB, & l'on tirera les rayons GA & GB. Par G l'on menera la perpendiculaire MG*m*, au rayon GB ſur laquelle on prendra G*n* égale au coſinus de l'angle B, vers M ſi l'angle BAC eſt obtus, ou G*ν* égale au même coſinus vers *m* ſi l'angle BAC eſt aigu; & ſur les axes B*b*, *nν* on tracera l'ellipſe B*nbν*. Enſuite on prendra ſur la circonférence du cercle AB*ar* de part & d'autre du point A les arcs AL, A*l* chacun égal au côté donné AC, & l'on tirera la corde L*l* qui coupera l'ellipſe B*nbν* en deux points C, C′ qui ſerviront à déterminer le troiſieme côté BC, en menant par ces mêmes points les lignes *f*CX, *φ*C′*x*′ perpendiculaires au rayon GB, leſquelles donneront les arcs B*f* & B*φ* égaux au troiſieme côté, ſelon que l'angle A oppoſé ſera obtus ou aigu. *C. Q. F.* 1°. *T.*

2°. Pour avoir l'angle A, ayant décrit le demi-cercle *l*KL ſur la corde L*l* comme diametre, & tirées les ordonnées C*c*, C′*c*′ on menera du point H les lignes H*c*, H*c*′ leſquelles donneront les angles LH*c*, LH*c*′ égaux à l'angle A ſelon qu'il doit être obtus ou aigu. L'angle C ſe trouvera par la conſtruction indiquée au n°. 186. *C. Q. F.* 2°. *T.*

SECONDE SOLUTION.

Si l'on ſuppoſe que les côtés connus ſont AC & BC avec l'angle B oppoſé au côté AC, l'on pourra trouver encore une autre ſolution qui ne ſera pas plus compliquée que la précédente. On prendra d'abord un point B quelconque ſur la circonférence du cercle ABR*a*, lequel ſera le ſommet de l'angle B. On tirera par ce point & le centre G le diametre BG*b*, auquel on menera le diametre MG*m* qui lui ſoit perpendiculaire; ſur lequel on prendra *n*G égal au coſinus de l'angle donné B; puis ayant pris de part & d'autre du point B les arcs BF, B*f* égaux au côté donné BC, & tiré la corde F*f*, on ſera cette proportion MG : *n*G : : *f*X : XC, ce qui déterminera le point C ſur le plan du cercle AR*ar*, lequel eſt viſiblement la projection de l'angle C.

Par le centre G & le point C l'on menera le rayon GCP; & ſur la ligne GC, comme diametre, on décrira un cercle : enfin du centre G avec un rayon GH égal au coſinus du côté donné AC, l'on décrira une portion de cercle qui coupera le dernier en deux points H, *h*, par leſquels on menera les lignes GHA, G*h*a qui détermineront le troiſieme côté demandé AB, ou aB ſelon que l'angle inconnu oppoſé au côté connu BC doit être obtus ou aigu. On pourroit auſſi trouver le point C par une conſtruction abſolument la même que celle qui a été expliquée au n°. 187; en décrivant un demi-cercle ſur la corde *f*F, & tirant au point X un rayon qui fit avec *f*X un angle égal à l'angle B, par l'extrémité duquel on abaiſſeroit une perpendiculaire à la même corde *f*X, laquelle détermineroit le point C ſans y employer de proportionnelles. Les angles en A & en C ſe détermineroient comme au premier Problême. *C. Q. F. T.*

PROBLEME IV.

191. *Connoiſſant deux angles quelconques* A & B

d'un triangle BAC *avec le côté* AC *oppoſé à l'un de ſes angles, trouver* 1°, *le côté oppoſé à l'autre angle;* 2°, *le troiſieme côté;* 3°, *le troiſieme angle.* (*fig.* 17)

SOLUTION.

D'un point A quelconque du cercle ABR*a* ſoit mené le diametre AG*a* auquel on tirera le diametre *r*GR qui lui ſoit perpendiculaire. De part & d'autre du même point A ſoient pris les arcs AL, A*l* chacun égal au côté donné AC, & ſoit tirée la corde L*l*. Sur cette corde, comme diametre, ſoit décrit le demi-cercle *l*KL; & du point H ſoient menés les rayons H*c*, H*c'* qui faſſent avec LH un angle égal à l'un des angles donnés A, ſelon que ce même angle eſt obtus ou aigu. Des points *c*, *c'* ſoient abaiſſées les perpendiculaires *c*C, *c'*C', leſquelles détermineront les points C, *c'* qui ſont les projections de l'angle C ou C'. Enſuite des points *c*, *c'* ſoient menées les lignes *cx*, *c'x'* qui faſſent avec les ordonnées C*c*, C'*c'* les angles C*cx*, C'*c'x'* égaux au complément de l'angle donné B. On a vu (au n°. 187) que la ligne C*x* eſt égale à CX dont la poſition détermine le côté AB & le côté BC. Pour la trouver, ſoit encore tirée la ligne GCP, & ſur CG ſoit décrit un cercle GHC*h*, enfin du point C comme centre, ſoit décrit avec un rayon = C*x* une portion de cercle qui coupera ce dernier en deux points X qui détermineroit le côté AB en menant le rayon GXB, & la corde *f*CXF menée par le point X, & le point C donnera les arcs B*f*, BF chacun égal au troiſieme côté; le troiſieme angle ſe trouveroit toujours par la conſtruction indiquée au n°. 186. *C. Q. F. T.*

SCHOLIE.

192. Si l'angle A eſt aigu, ainſi que l'angle B, le point X trouvé dans le quart de cercle AG*r* donnera le côté AB qui ſervira pareillement à trouver le côté BC. Il n'eſt pas moins viſible que ſi l'on imagine un cercle

décrit sur le rayon C'G, dans lequel soit inscrit la ligne C'x', on aura encore deux solutions du même problême, selon que l'angle A du triangle BAC sera aigu, & l'angle B obtus, ou que les angles en A & B seront aigus, & l'angle en C obtus. Nous n'avons point tiré toutes ces lignes sur la figure dans la crainte de la rendre trop confuse.

PROBLEME V.

193. *Connoissant les trois côtés d'un triangle sphérique quelconque* BAC, *trouver un angle quelconque du même triangle.*

PREMIERE SOLUTION.

Ayant pris sur le plan du cercle AR*a* l'arc AB égal à l'un des côtés donnés, & tiré des extrémités A, B de cet arc les rayons AG, BG; on prendra de part & d'autre du point A les arcs AL, A*l* égaux au côté AC & les arcs B*f*, BF égaux au troisieme côté BC, puis on tirera les cordes L*l*, F*f* qui se couperont dans un point C, lequel sera la projection de l'angle C. Enfin ayant élevé aux rayons GA & GB par le centre G les perpendiculaires *r*GR, *m*GM, on cherchera une quatrieme proportionnelle G*n*, aux lignes *f*X, CX, MG; & par le point *n* qu'elle déterminera sur MG, l'on menera la perpendiculaire *n*N terminée à la circonférence en N, ce qui donnera l'arc MN égal à la mesure de l'angle B; pareillement on cherchera une droite G*d* quatrieme proportionnelle aux lignes *l*H, CH, *r*G, laquelle déterminera sur *r*G un point *d*, par lequel on élevera aussi la perpendiculaire *d*D qui donnera l'arc RD égal à l'angle en A; l'angle C se trouveroit par une construction semblable, en prenant le côté AC sur la circonférence au lieu du côté AB. *C. Q. F. T.*

SECONDE SOLUTION.

Si l'on ne veut pas se servir de proportionnelles, ayant trouvé comme ci-devant le point C par l'intersection des

droites *l*L,F*f*; ſur L*l* comme diametre, on décrira le demi-cercle LK*l*; & par le point C l'on menera la perpendiculaire C*c* au diametre L*l*; & du point *c* au point H, l'on tirera *c*H qui donnera l'angle *c*HL égal à l'angle en A; enſuite ayant pris C*x* = CX & tiré la ligne *cx*, l'angle *cx*C ſera égal à l'angle B; on trouveroit l'angle C par une conſtruction ſemblable. *C. Q. F. T.*

PROBLEME VI.

194. *Connoiſſant les trois angles d'un triangle, trouver chacun des trois côtés.*

SOLUTION.

On fera un triangle DEF (*fig.* 11.) dont les trois côtés ſoient ſuppléments des angles du triangle donné; enſuite par l'une des conſtructions du problême précédent on cherchera les angles de ce nouveau triangle, leſquels ſeront les ſuppléments des côtés que l'on demande. *C. Q. F. T.*

Scholie général pour les ſolutions précédentes.

195. On voit que les ſix derniers Problêmes donnent la ſolution Géometrique de tous les cas des triangles ſphériques obliquangles. Les conſtructions peuvent également s'appliquer aux triangles rectangles, & n'en deviennent que plus ſimples. Nous nous ſommes diſpenſés de démontrer chaque ſolution en particulier, parce qu'elles ſe déduiſent toutes comme autant de corollaires de la conſtruction générale des projections ortographiques, expliquées ci-devant au n°. 161. & développées ſur la figure 16, dont l'intelligence bien ſuppoſée donne toutes les notions qui pourroient devenir néceſſaires pour une démonſtration complette de nos ſolutions. Nous ajouterons encore quelques problêmes relatifs à cette eſpece de projection qui eſt celle dont on fait le plus d'uſage en Aſtronomie.

PROBLEME VII.

PROBLEME VII.

195. *Connoiſſant l'ellipſe qui eſt la projection ortographique d'un grand cercle, trouver ſur le plan de projection l'apparence des poles de ce même grand cercle; & réciproquement, ayant les poles projettés d'un grand cercle, trouver l'ellipſe qui eſt la projection de ce grand cercle.* (fig. 19.)

SOLUTION.

Imaginons que la droite A*a* nous repréſente le plan du grand cercle de la ſphere, auquel ſe fait la projection ortographique de tous les points de la ſurface ſphérique; & que P*p* perpendiculaire à GL eſt l'axe du cercle à projetter, lequel ſera par conſéquent repréſenté par GL. Il eſt de plus évident que le cercle AB*ab* qui paſſe par les poles P, *p* du cercle à projetter, ſera perpendiculaire au plan de projection. Cela poſé, ſi l'on abaiſſe les perpendiculaires Pϖ, Gg, il eſt aiſé de voir que ϖ ſera la projection du pole P, & *g* ſera celle de l'extrémité G du diametre GL du cercle à projetter : mais à cauſe de l'angle droit GCP, l'angle GC*a* eſt complément de l'angle *a*CP qui déſigne l'élevation du pole ſur le plan de projection. D'où il ſuit que la diſtance Cϖ de la projection du pole P d'un grand cercle C, eſt égale au coſinus de l'élevation du pole ſur le plan de projection; ou, ce qui revient au même, au ſinus de l'élévation du cercle à projetter ſur le même plan de projection; & le demi petit axe de l'ellipſe qui eſt la projection de ce cercle, eſt égal au ſinus de l'élevation du pole ſur le plan de projection. *C. Q. F. T. & D.*

PROBLEME VIII.

196. *Trouver les dimenſions de l'ellipſe qui eſt la projection ortographique d'un petit cercle de la ſphere.* (fig. 19.)

SOLUTION.

Que la ligne MON repréſente le diametre du petit cercle dont on demande la projection ortographique. Cette ligne MN étant perpendiculaire à l'axe P*p*, le petit cercle qu'elle repréſente ſera parallele au cercle GL dont l'axe eſt P*p*. Cela poſé, des points M, O, N ſoient abaiſſées les perpendiculaires M*m*, O*o*, N*n* à la ligne A*a*; il eſt viſible que le point *o* ſera le centre de l'ellipſe qui doit être la projection du petit cercle MN parallele à GL, & que *mn* ſera le petit axe de cette même ellipſe. Cela poſé, à cauſe des triangles ſemblables CPϖ, CO*o* on aura CP : CO : : Cϖ : C*o*. c'eſt-à-dire, *le rayon eſt au ſinus de la diſtance du petit cercle au grand cercle qui lui eſt parallele, comme le coſinus de la hauteur du pole ſur le plan de projection eſt à la diſtance* C*o* *du centre* o *de l'ellipſe à décrire au centre* C. Les triangles ſemblables GC*g*, MOR donnent auſſi GC : C*g* : : MO : OR ou *om* = *on*. C'eſt-à-dire, *le ſinus total eſt au ſinus de l'élévation du pole ſur le plan de projection, comme le ſinus de la diſtance du petit cercle au pole eſt au demi petit axe de l'ellipſe à décrire*, & dont le grand axe ſera viſiblement égal à MN. On peut auſſi trouver le point *m*, en prenant C*m* égal au ſinus de la différence des arcs MG, BG. Ce qui ſuffit pour décrire l'ellipſe demandée. *C. Q. F. T.*

Application des derniers Problêmes aux projections dont on fait uſage dans la Théorie des Eclipſes.

197. La Terre étant à une diſtance prodigieuſe du Soleil, tous les rayons qui viennent de cet aſtre à notre globe peuvent être regardés comme paralleles; & ſi l'on imagine un plan perpendiculaire au rayon mené du centre du ſoleil au centre de la terre, ce plan qui coupera la ſphere en deux parties égales, repréſentera le diſque de

la terre applatie vu du ſoleil ; il ſera auſſi celui qui ſépare l'hémiſphere éclairé de l'hémiſphere obſcur ; & enfin tous les points de l'hémiſphere expoſé au ſoleil ſeront projettés ortographiquement ſur ce même plan. Cela poſé ; ſi P, *p* repréſentent les poles du monde, la ligne GL déſignera l'équateur ; le petit cercle MN ſera un parallele dont GM eſt la latitude Géographique. Le cercle AB*ab* ſera le cercle que les Aſtronomes appellent méridien univerſel, la ligne BC déſignera le rayon qui vient du centre du ſoleil au centre de la terre, & par conſéquent l'arc BG ſera la déclinaiſon du ſoleil. La ligne AC*a* ſera une ligne perpendiculaire au plan du cercle B*cb*, ſur laquelle ſe projette l'axe de l'écliptique aux ſolſtices, & qui fait avec ce même axe un angle égal à l'obliquité de l'écliptique aux points équinoxiaux. AC*a* repréſentera le cercle ſur lequel tous les points vus du ſoleil ſe projettent ortographiquement : *a*P ſera la hauteur du pole ſur le diſque éclairé ; qui eſt égale, comme on le voit, à la déclinaiſon du ſoleil. D'après toutes ces définitions, ſi l'on veut tracer l'ellipſe qui eſt la projection du parallele MN, il eſt évident que le problême eſt préciſément le même que nous venons de réſoudre au dernier article ; & les analogies que nous avons données pour trouver le centre *o* de l'ellipſe à décrire & ſon demi petit axe ſe réduiront aux deux ſuivantes : *Le rayon eſt au ſinus de la latitude géographique du parallele, comme le coſinus de la déclinaiſon du ſoleil eſt à la diſtance* Co ; & enſuite *le ſinus-total eſt au ſinus de la déclinaiſon du ſoleil, comme le coſinus de la latitude géographique du parallele eſt au demi petit axe de l'ellipſe qui eſt la projection de ce même parallele.*

198. Comme ces ſolutions graphiques ſe rencontrent ſouvent dans l'Aſtronomie, particuliérement dans la détermination des paſſages des planetes ſur le diſque du ſoleil, j'ajouterai ici la maniere de tracer ſur le diſque

éclairé le parallele d'un lieu dont la latitude eſt connue ; d'après ce que nous venons de démontrer.

Soit AG*a* Q (*fig.* 20) le cercle ſur lequel ſe doit faire la projection. Par un point A quelconque de la circonférence ſoit mené le diametre A*a*, & ſoit pris de part & d'autre de ce point les arcs AP, A*p* égaux à la déclinaiſon du ſoleil pour le temps où l'on demande la projection. Soit tirée la corde P*p* qui coupera le diametre A*a* dans un point ϖ; ce point ſera viſiblement la projection du pole P. Soit auſſi mené au point P le rayon CP, auquel on élévera le diametre ÆCQ qui lui ſoit perpendiculaire, & qui repréſentera l'équateur; des points Q, Æ on prendra les arcs ÆL, Q*l* égaux à la latitude du lieu ; vers A, ſi elle eſt de même dénomination que la déclinaiſon du ſoleil, & l'on tirera la corde L*l*, qui coupera le diametre P*p'* dans un point K, par lequel on menera H*h* parallele à P*p* ; ce qui donnera le centre de l'ellipſe à décrire en O. Enfin l'on prendra CN égal au ſinus de la différence des arcs AP, ÆL, & ON ſera le demi petit axe de l'ellipſe demandée, dont le grand axe M*m* eſt égal à L*l* ; ayant de plus pris O*n*=ON, ſur les axes M*m*, N*n*, on décrira une ellipſe MN*mn* qui ſera la projection du parallele donné pour le jour où la déclinaiſon du ſoleil eſt égale à l'arc AP. Cette ellipſe étant tracée touchera le cercle AG*a*Q dans deux points G, I : ſi l'on tire la ligne GI qui ſe trouvera perpendiculaire au rayon CA ; l'arc GNI réduit en heures, minutes & ſecondes de temps, déſignera la durée du jour pour le parallele au temps où la déclinaiſon eſt égale à l'arc AP.

199. On peut auſſi trouver aiſément ſur le même plan la projection de l'équateur. Pour cela, des extrémités Æ, Q du diametre ÆQ qui repréſente l'équateur, on n'a qu'à abaiſſer les perpendiculaires ÆS, Q*s*, & ſur les axes B*b*, S*s* décrire l'ellipſe BS*bs* qui ſera la projection de l'équateur terreſtre vu du ſoleil au temps où la déclinaiſon eſt égale à l'arc AP.

200. Enfin l'on peut encore trouver ſur le même plan la projection de l'écliptique, ainſi que les points équinoxiaux. Pour y parvenir, on fera réflexion que l'axe de l'équateur faiſant toujours avec l'axe de l'écliptique un angle égal à l'obliquité de l'écliptique ; le pole P décrira autour de l'axe de l'écliptique la circonférence d'un petit cercle, dont le rayon eſt égal au ſinus de cette même obliquité, lequel petit cercle eſt la baſe d'un cône dont la hauteur eſt égale au coſinus de cette même obliquité, qui eſt auſſi l'axe de l'écliptique. Cela poſé, pour avoir cet axe ; ſur la ligne C♋ comme diametre, on décrira un demi-cercle CV♋, dans lequel on inſcrira une ligne CV égale au coſinus de l'obliquité de l'écliptique ; & tirant la ligne VCr, on aura viſiblement l'axe de ce même grand cercle. De plus à cauſe que le ſoleil eſt toujours dans le plan de l'écliptique, il eſt viſible que ce grand cercle doit être repréſenté par une ligne droite ; tirant donc ECT perpendiculaire à l'axe RCr de l'écliptique, cette ligne ſera la projection de ce cercle, & les points ♈, ♎ où elle coupe l'ellipſe BS*b*, ſeront les points équinoxiaux. Enfin ſi par le point ♈ on fait paſſer l'ordonnée *f*♈F perpendiculaire au diametre B*b*, elle déterminera l'arc *a*F égal à l'aſcenſion droite du ſoleil ; & ſi l'on mene encore par le même point la ligne ♈D, qui ſoit perpendiculaire au diametre ECT, l'arc *r*D ſera la meſure de la longitude du ſoleil. On pourroit auſſi trouver avec la même facilité l'apparence des points ſolſtitiaux ſur l'équateur & ſur l'écliptique. Mais nous n'inſiſterons pas plus long-temps ſur cette partie, il nous ſuffira de faire voir avec quelle facilité on peut appliquer les projections ortographiques aux principaux problêmes de l'Aſtronomie ſphérique. Nous obſerverons encore que l'on ne s'eſt pas formé de ces conſtructions une idée aſſez juſte parmi quelques Aſtronomes. Les uns rejettent abſolument ces conſtructions comme trop peu exactes ; les autres les employent avec trop de

confiance. L'uſage qu'il nous paroît qu'on en devroit faire, c'eſt celui qu'on fait en général de toutes les figures de Géometrie qui ne ſervent qu'à guider l'eſprit dans la recherche des formules numériques que l'on peut trouver, en appliquant à ces conſtructions l'analyſe algébrique ou les regles générales de la Trigonométrie. Dans cette vue nous ajouterons encore quelques corollaires ſur les problêmes précédents pour mieux éclaircir la Théorie des projections.

COROLLAIRE I.

201. Il ſuit du dernier problême que pour déterminer ſur une ellipſe quelconque qui eſt la projection d'un grand cercle un arc d'un nombre quelconque de degrés en commençant d'un point donné ſur cette ellipſe ; il n'y a qu'à abaiſſer de ce point une perpendiculaire au grand axe prolongée juſqu'à la circonférence du cercle décrit ſur ce grand axe comme diametre, & enſuite prendre ſur la circonférence de ce même cercle, en commençant du point où cette ordonnée coupe la circonférence, un arc égal au nombre de degrés donnés; puis abaiſſer de ſon extrêmité une nouvelle ordonnée au grand axe de l'ellipſe, laquelle déterminera ſur la circonférence de l'ellipſe un arc du nombre de degrés donné. (*fig.* 21).

COROLLAIRE II.

202. Si l'arc donné eſt de 90°; ayant abaiſſé du point donné une perpendiculaire à l'axe de l'ellipſe, on prendra ſur le même axe de l'autre côté du centre une ligne égale au ſinus de l'arc entre l'extrémité de l'axe la plus proche du point donné, & la perpendiculaire ou l'ordonnée qui paſſe par le point donné. Par exemple, pour déterminer un arc de 90° ſur l'ellipſe AC*da* à partir du point C, on n'aura qu'à prendre la ligne Gλ égale au ſinus *l*H de l'arc A*l* = AC, terminé à l'or-

donnée qui paſſe par le point donné, & enſuite par le point λ, ainſi déterminé, élever la perpendiculaire λ*l'* qui donnera ſur cette ellipſe l'arc C*l'* de 90°. De même en prenant ſur le demi grand axe G*b* de l'ellipſe BC*b* la ligne Gφ égale au ſinus *f*X de l'arc BF = BC, & élevant la perpendiculaire φ*f'*, on aura ſur cette même ellipſe l'arc C*f'* de 90°.

COROLLAIRE III.

203. Il ſuit, de ce qui précede, qu'il eſt préſentement fort aiſé de trouver ſur le plan du cercle ABR*ar* la meſure de l'angle C ou BCA; car un angle ſphérique quelconque ayant pour meſure l'arc de grand cercle compris entre ſes côtés & décrit de ſon ſommet comme pole, il eſt viſible que tout ſe réduit à tracer l'ellipſe Q *g q* qui eſt la projection du grand cercle dont le pole eſt en C; ce qui ſe fera de la maniere ſuivante. Ayant tiré par le point C & le centre G le diametre PCG*p*, on lui menera par les points G, C les perpendiculaires QG*q*, G'C*g'*; enſuite on prendra ſur G*p* une partie GS égale à G'C qui eſt le ſinus d'élévation du point C ſur le plan de projection; & cette ligne ſera le demi petit axe de l'ellipſe qui eſt la projection du grand cercle dont le pole eſt en C. Donc les points *l'*, *f'* où cette ellipſe coupe les ellipſes A*da*, B*nb* détermineront l'arc *f' l'* dont le correſpondant βγ ſur le cercle ABR*r* compris entre les ordonnées γΛ, βΦ ſera la meſure de l'angle en C.

COROLLAIRE IV.

204. Il eſt encore aiſé de voir que pour trouver la meſure de l'angle en C, on n'a pas beſoin de tracer l'ellipſe qui eſt la projection du grand cercle dont cet angle eſt le pole. Car ayant déterminé comme ci-devant les points *l'*, *f'* ſur les ellipſes AC*a*, B*nb*; ſi de ces points l'on abaiſſe au diametre QG*q* perpendiculaire à GCP, les

ordonnées $l'A$, $f'\Phi$; leurs prolongements jusqu'à la circonférence du cercle AR*ar* détermineront l'arc $\beta\gamma$ égal à la mesure de l'angle en C.

PROBLEME IX.

205. *Trouver sur la surface du cercle* ABR*r*, 1°, *la projection de l'arc* Aδ *abaissé de l'angle* A *perpendiculairement au côté opposé* BC ; 2°, *la grandeur des segments* Bδ, Cδ *du côté* BC ; 3°, *les segments de l'angle* BAC ; 4°, *la valeur de la perpendiculaire* Aδ. (*fig.* 21).

SOLUTION.

Puisque l'arc dont on cherche la projection, appartient à un grand cercle de la sphere qui passe par le point A, il est visible que la ligne AG*a* sera le grand axe de l'ellipse qui doit en être la projection. De plus, à cause que ce cercle est supposé perpendiculaire au côté BC, il doit passer par le pole de ce même arc BC, & par conséquent l'ellipse demandée doit aussi passer par la projection de ce pole. Or en prenant sur le rayon G*m* une partie GZ = N*n*, le point Z sera le pole de l'arc BC (n°. 195) ; donc ce point sera un de ceux de l'ellipse à décirire. Je mene donc par ce point Z une ligne Zζ perpendiculaire au diametre A*a*, & je la prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre le cercle AR*ar* en un point θ. Je prends sur RG une ligne Gρ quatrieme proportionnelle aux lignes $\theta\zeta$, ζZ, RG ; & je décris sur les demi-axes GA & Gρ l'ellipse A$\delta\rho a$ qui est la projection demandée du cercle perpendiculaire à BC. *C. Q. F.* 1°, *T.*

2°. Par le point δ où cette ellipse coupe le côté BC, je mene la perpendiculaire $\nu\delta\omega\mu$ au rayon GB, & les arcs Fμ, Bμ sont les segments du côté BC. *C. Q. F.* 2°, *T.*

3°, Si par le point ρ on éleve la perpendiculaire $\rho\sigma$ au rayon GR, les arcs Rσ, Dσ seront les mesures des segments BAδ, CAδ de l'angle BAC. *C. Q. F.* 3°, *T.*

4°. Enfin si par le point δ on tire l'ordonnée $\ldots\delta\ldots$

perpendiculaire au rayon GA, l'arc A„ ſera la valeur de la perpendiculaire A∫. *C. Q. F.* 4°, *T.*

PREMIER SCHOLIE.

206. Si l'on demandoit de déterminer la projection du cercle qui diviſe l'angle BAC en deux également, on la trouveroit par une conſtruction abſolument ſemblable; en prenant ſur le rayon GR une ligne Gk égale au coſinus de la moitié de l'angle BAC; & décrivant une ellipſe ſur les demi-axes GA & Gk : on voit de plus que la conſtruction expliquée au n°, 202, donneroit de la même maniere la ſolution du problême, en ſuppoſant que l'on ait abaiſſé une perpendiculaire de l'angle C, ſur le côté AB prolongé autant qu'il ſeroit néceſſaire. Enfin l'on voit dans la conſtruction du dernier problême que l'arc Rθ eſt égal à l'arc A∫ perpendiculaire au côté BC, à cauſe que les arcs AR, „θ de 90° chacun ont une partie commune „R.

SECOND SCHOLIE.

207. Cette conſtruction nous conduit naturellement à une démonſtration fort ſimple & fort élégante d'une des fameuſes analogies de *Néper*, telle à peu près qu'elle ſe trouve dans ſon Traité intitulé *Logarithmorum mirifici Canonis Conſtructio.* Ayant déterminé toutes les parties dont on vient de parler par la méthode que nous venons d'expliquer, ſoit élevée à l'extrémité A du diametre A*a* la perpendiculaire indéfinie AΛ (*fig.*22); il eſt clair que ſi du point B comme pole on décrit ſur la ſurface de la ſphere un petit cercle dont le rayon circulaire ſoit égal à l'arc BC, ce cercle paſſera par les points L, C, *c*, *l*: De plus ſoient encore menées par les points C, *c* les droites FC*f*, ϖω*co* paralleles à la tangente AK; il eſt viſible que l'arc A*f* ſera égal à l'arc AC, & que A*o* ſera égal à l'arc A*c* qui eſt la différence des ſegments A∫, ∫C formés ſur ce même côté AC par la

perpendiculaire Bδ. Cela posé, si l'on tire encore du point *a* par les points L, *l*, *f*, *o*, les droites *a*LΛ, *a*lλ, *a*fK, *a*ok prolongées jusqu'à la tangente AΛ; il est aisé de voir que les quatre points Λ, λ, K, *k* appartiennent à la circonférence d'un cercle décrit sur le plan représenté par AΛ, & tangent à la sphere en A, lequel cercle est la base d'un cône oblique qui a son sommet au point *a*. Pour le démontrer, il suffira de prouver que la section du cône qui auroit pour base le cercle décrit sur le diametre *l* L par le plan AΛ, est anti-parallele à cette même base; car on fait voir dans tous les traités de sections coniques que cette section est un cercle. Or c'est ce qui arrive ici. Car l'angle AΛ*a* étant formé par une tangente & par une corde, aura pour mesure la moitié de la différence des arcs AF*a*, A*f*L compris entre ses côtés; mais AL = AI, donc AF*a* — A*f*L = AF*a* — AFI = *a*I = *a*L; or la moitié de ce dernier arc est précisément la mesure de l'angle *a l* L; donc les triangles *a l* L, *a* Λ λ sont semblables; donc le cône est coupé anti-parallélement à sa base, & par conséquent le cercle décrit sur *l*L sera projetté en cercle sur le plan AΛ; donc enfin les sécantes intérieures donneront AK : AΛ :: Aλ : A*k*, c'est-à-dire, *la tangente de la demi-base* AC *est à la tangente de la demi-somme des côtés* AB, BC; *comme la tangente de la demi-différence des mêmes côtés est à la tangente de la demi-différence des segments de cette même base.*

Pour se convaincre de l'identité des deux dernieres proportions, on fera attention que si l'on regarde le diametre A*a* comme rayon, les lignes dont on vient de parler, seront les tangentes des angles au point *a*. D'ailleurs ces angles A*a*λ, A*ak*, A*a*K, A*a*Λ ayant leur sommet à la circonférence du cercle AL*a*, ont pour mesure la moitié des arcs compris entre leurs côtés. Or l'arc A*f* par construction est égal à la base AC du triangle sphérique BAC; l'arc AL est égal à la somme

des côtés AB + BC, & A*l* eſt égal à la différence des mêmes côtés; enfin puiſque les arcs A*c*, A*o* ſont d'un même nombre de degrés étant compris entre plans paralleles Aα, ωo, il eſt clair que A*o* ſera la différence des ſegments de la baſe. *C. Q. F. D.*

TROISIEME SCHOLIE.

208. On voit par ce qu'on vient de démontrer que nous avons employé ici deux projections; l'une ortographique de toutes les parties du triangle ſur le plan du cercle A*La*; l'autre ſur le plan repréſenté par AK, dans laquelle on ſuppoſe l'œil placé au point *a*, qui peut être pris pour l'un des poles de la ſphere, ce qui a fait nommer cette eſpece de projection, *projection polaire*; laquelle a beaucoup d'analogie avec les projections *ſtréréographiques* dont on fait un grand uſage dans les Cartes Géographiques, & ne différe de ces projections, qu'en ce que dans ces dernieres l'on ſuppoſe l'œil à un point quelconque de la ſurface de la ſphere, & l'on imagine que la projection de l'hémiſphere oppoſé ſe fait ſur le plan du grand cercle prolongé autant qu'il eſt néceſſaire, & perpendiculaire au rayon mené du centre de la ſphere au lieu de l'œil ſur la ſurface ſphérique. L'avantage de ces projections vient de ce qu'elles ont la propriété de donner toujours des figures ſemblables à celles qu'il s'agit de projetter, & par conſéquent de repréſenter ſur un plan la Carte d'un pays par des figures ſemblables à celles qu'elles forment ſur la ſurface du globe.

Cette propriété importante eſt une ſuite néceſſaire de ce que les cônes de projections ſont toujours coupés anti-parallélement par le plan de projection. Ceux qui veulent étudier à fond cette partie, peuvent recourir à l'ouvrage du Pere *Tacquet*, ainſi qu'aux Traités d'Optique du Pere d'*Aiguillon*. Nous ajouterons encore ici le problême ſuivant qui donne une ſolution extrêmement

ſimple de pluſieurs cas des triangles ſphériques, & qui eſt une nouvelle eſpece de ſolution graphique.

PROBLEME X.

209. *Connoiſſant les trois côtés d'un triangle* BAC *trouver un angle quelconque de ce même triangle par le développement de ſes parties*, (fig. 23).

SOLUTION.

Sur un cercle quelconque BAC, on prendra les trois arcs AB, AC & Bc′ reſpectivement égaux à chacun des côtés du triangle à réſoudre. Enſuite ayant tiré le rayon GA, ſi c'eſt l'angle A qu'on veut avoir, on lui menera la tangente *d*AD terminée en *d* & D par les prolongements des rayons GC & GB. Sur le rayon G*c*′ prolongé, autant qu'il ſera néceſſaire, on prendra une ligne G*d*′ égale à la ſécante G*d* du côté AC; enfin des points D, A comme centre avec les rayons D*d*′, A*d*, on décrira deux arcs de cercle qui ſe couperont dans un point δ, & donneront l'angle δAD égal à l'angle A du triangle BAC. On trouveroit par une conſtruction ſemblable les deux autres angles du même triangle. De plus il eſt viſible que cette ſolution porte avec elle ſa démonſtration; car les deux lignes AD, A*d* ou Aδ étant les tangentes des arcs AB, AC, & par conſtruction perpendiculaires à l'interſection commune AG des plans BAG, CAG, l'angle qu'elles forment, lorſqu'elles ſont terminées par la ligne Dδ = D*d*′, eſt viſiblement égal à l'angle en A du triangle BAC. *C. Q. F. T. & D.*

COROLLAIRE I.

210. Il eſt aiſé de voir qu'on pourroit faire uſage de cette conſtruction pour réſoudre un triangle dont on auroit les trois angles, en appliquant cette ſolution à un triangle dont toutes les parties ſeroient ſupplé-

ment de celles du triangle à réſoudre (nº. 131).

COROLLAIRE II.

211. Il n'eſt pas moins évident qu'on pourroit faire uſage de cette conſtruction pour réſoudre un triangle, dans lequel on connoîtroit deux côtés & l'angle compris. Car ayant fait les arcs AB, AC reſpectivement égaux aux côtés de l'angle donné, & tiré les tangentes AD, A*d* terminées aux rayons GB & GC prolongés, autant qu'il feroit néceſſaire; il n'y auroit plus qu'à faire l'angle DAδ égal à l'angle donné, & tirer Dδ, après avoir pris Aδ égal à la tangente A*d*. Enfin des points G, D comme centre avec les rayons G*d'* = G*d*, D*d'* = Dδ on décriroit deux arcs de cercles qui par leur interſection détermineroient un point *d'*, duquel menant au centre G le rayon *d'*G, on auroit l'arc B*c'* égal au troiſieme côté, & par le moyen duquel on trouveroit les autres angles.

CHAPITRE QUATRIEME.

De la Réſolution analytique ou algébrique des Triangles ſphériques quelconques.

AVERTISSEMENT.

TOUS les calculs que nous aurons à faire dans ce Chapitre, étant appuyés ſur les conſtructions expliquées au chapitre précédent, il eſt abſolument néceſſaire de les avoir bien entendues. D'ailleurs, pour ne pas rendre ces calculs trop difficiles pour les Commençants par la variété des ſignes, nous les appliquerons à la figure 17, dont toutes les parties ſeront déſignées comme on le voit dans la table ſuivante. Si quelques termes viennent à changer de ſignes en faiſant l'application de ces formules à d'autres triangles, cela avertit que les angles que nous avons ſuppoſés aigus ou obtus, deviennent obtus ou aigus, ou que les mêmes changements ont lieu ſur les côtés.

Soit donc pour chaque partie du triangle BAC, en ſuppoſant toujours le ſinus total $= r$.

Sin AB=BK $= a$.	*Sin* ABC=Nn $= m$.
Cof AB=GK $= b$.	*Cof* ABC=Gn $= n$.
Sin BC=FX *ou* fX $= c$.	*Sin* BAC=Dd $= p$.
Cof BC=GX $= d$.	*Cof* BAC=Gd $= q$.
Sin AC=LH *ou* lH $= f$.	*Sin* ACB $= h = \frac{ap}{c} = \frac{am}{f}$.
Cof AC=GH $= g$.	*Cof* ACB $= k = \frac{\sqrt{r^2c^2 - a^2p^2}}{cc}$.

Les conſtructions expliquées au (n°.161) donneront de plus les valeurs ſuivantes des lignes CX, Cf, &c.

$$\begin{array}{llll} \textit{Tang}\ \text{AB} = \frac{ar}{b} & \text{CX} = \frac{cn}{r} \\ \textit{Tang}\ \text{BC} = \frac{cr}{d} & \text{C}f = c - \frac{cn}{r} \\ \textit{Tang}\ \text{AC} = \frac{fr}{g} & \text{CF} = c + \frac{cn}{r} \\ \textit{Tang}\ \text{B} = \frac{mr}{n} & \text{CH} = \frac{fq}{r} \\ \textit{Tang}\ \text{A} = \frac{pr}{q} & \text{CL} = f + \frac{fq}{r} \\ \textit{Tang}\ \text{C} = \frac{hr}{k} & \text{C}l = f - \frac{fq}{r} \end{array}$$

Pour une plus grande commodité, & afin de ne pas confondre toutes ces dénominations, il eſt à propos de les relever toutes ſur une feuille volante, & l'on ne ſera point obligé de retourner ſans ceſſe à cette Table, afin d'y retrouver l'expreſſion analytique de chaque ligne.

PROBLEME I.

212. *Trouver le rapport entre les ſinus des angles & les ſinus des côtés, pour un triangle ſphérique quelconque.* (fig. 17.)

SOLLUTION.

A cauſe des ſécantes fF, lL intérieures au cercle, on aura CF × Cf = CL × Cl; ou, ce qui revient au même, $f\text{X}^2 - \text{CX}^2 = l\text{H}^2 - \text{CH}^2$; & ſubſtituant à ces quantités leurs valeurs algébriques, on aura $c^2 - \frac{c^2n^2}{r^2} = f^2 - \frac{f^2q^2}{r^2}$ ou $c^2r^2 - c^2n^2 = f^2r^2 - f^2q^2$; mettant m^2 à la place de $r^2 - n^2$ & p^2 pour $r^2 - q^2$, on aura $c^2m^2 = f^2p^2$, & tirant les racines de chaque membre, puis les mettant en proportion, on aura $c : f :: p : m$; c'eſt-à-dire, *ſin* BC : *ſin* AC :: *ſin* BAC : *ſin* ABC. On voit donc

que dans un triangle ſphérique quelconque les ſinus des angles ſont entr'eux, comme ceux des côtés oppoſés. *C. Q. F. T.*

PROBLEME II.

213. *Connoiſſant deux côtés & l'angle compris, trouver* 1°, *un angle quelconque ;* 2°, *le troiſieme côté.* (fig. 17.)

Soient AB & AC les côtés connus avec l'angle BAC compris entre ces côtés ; & cherchons d'abord l'angle B. A cauſe des triangles ſemblables GKB, GHO, on aura GK : KB : : GH : HO ; ou $b : a :: g : \frac{ag}{b}$; de plus on a par conſtruction Gr : Gd : : lH : CH ; ou $r : q :: f : \frac{fq}{r}$; donc CO ou CH + HO $= \frac{fq}{r} + \frac{ag}{b}$; encore il eſt viſible que l'angle OCX du triangle rectangle CXO eſt égal à l'angle AGB ; or on a dans ce même triangle CXO, R : *cofin* AB : : CO : CX. Donc CX $= \frac{bfq}{rr} + \frac{ag}{r}$. Enfin à cauſe que les lignes fX, CX ; MG, nG ſont proportionnelles par conſtruction (n°. 161) on aura fX : CX : : MG : nG, ou analytiquement $c = \frac{fp}{m}$ (n°. 212) : $\frac{bfq}{rr} + \frac{ag}{r} :: r : n$; d'où l'on tire $\frac{nfp}{m} = \frac{bfq}{r} + ag$, ce qui donne $\frac{m}{n} = \frac{r^2 fp}{bfq + agr}$, & diviſant les deux termes de la fraction qui eſt le ſecond membre de l'équation par f, on aura enfin $\frac{m}{n} = \frac{r^2 p}{bq + agr}$; c'eſt-à-dire, *tang* $B = \frac{RR \times \textit{ſin}\, A}{\textit{ſin}\, AB \times \textit{cot}\, AC + \textit{coſ}\, AB \times \textit{coſ}\, A}$. *C. Q. F.* 1°, *T.*

2°. Pour avoir le troiſieme côté BC, il n'y a qu'à regarder le ſinus de ce côté comme inconnu, en mettant c au lieu de $\frac{fp}{m}$ dans l'équation $\frac{nfp}{m} - ag = \frac{bfq}{r}$ ce qui

& qui donnera $c = \frac{ag}{n} + \frac{bfq}{rn}$, d'où l'on tire *sin* BC $= \frac{cos\,AC \times sin\,AB}{cos\,B} + \frac{cos\,AB \times cos\,A \times sin\,AC}{R \times cos\,B}$. C. Q. F. 2°, T.

COROLLAIRE.

214. Il eſt aiſé de voir que ſelon les côtés que l'on ſuppoſera connus avec l'angle compris ; on trouveroit pour chaque angle des formules ſemblables à celles que nous avons trouvées pour l'angle B, ainſi l'on aura les formules ſuivantes.

$$Tang\ B = \frac{RR \times sin\,A}{sin\,AB \times cos\,AC + cos\,AB \times cos\,A} = \frac{RR \times sin\,C}{sin\,BC \times cos\,AC + cos\,BC \times cos\,C}.$$

$$Tang\ C = \frac{RR \times sin\,A}{sin\,AC \times cot\,AB + cos\,AB \times cos\,A} = \frac{RR \times sin\,B}{sin\,BC \times cot\,AB + cos\,BC \times cos\,B}.$$

$$Tang\ A = \frac{RR \times sin\,C}{sin\,AC \times cot\,BC + cos\,AC \times cos\,C} = \frac{RR \times sin\,B}{sin\,AB \times cot\,BC + cos\,AB \times cos\,B}.$$

On doit remarquer que la plupart de ces formules changeront de ſigne, ſuivant les différentes combinaiſons des angles aigus ou obtus ; ainſi lorſqu'on voudroit en faire l'application à quelque cas particulier, il faudroit y avoir attention. Par exemple, ſi l'on cherche l'angle B du triangle BAC (*fig.* 18.) dont on ſuppoſe les côtés AB, AC connus avec l'angle A qu'ils comprennent, on trouvera comme dans la figure 17, HO $= \frac{ag}{b}$, CH $= \frac{fq}{r}$; mais CO eſt égal à HO — CH. Ainſi la tangente de l'angle B devient $= \frac{RR \times sin\,A}{sin\,AB \times cos\,AC - cos\,AB \times cos\,A}$.

Pareillement le terme *cos* AC × *cos* A deviendroit négatif dans la formule qui donne la tangente de C.

PROBLEME III.

215. *Supposant les mêmes données qu'au problême précédent, il faut trouver le troisieme côté indépendamment des angles adjacents à ce côté.*

SOLUTION.

Pour la facilité du calcul, nous supposerons que les deux côtés connus sont AB & BC, avec l'angle B qu'ils comprennent (*fig.* 17 & 18). Il est visible que tout se réduit à trouver le sinus IH ou le cosinus GH du côté AC. Cela posé dans le triangle rectangle CXO; l'on a *cos* AB : *sin* AB : : CX : XO ou $b : a :: \frac{cn}{r} : \frac{acn}{br}$; donc GO ou GX + XO = $d + \frac{acn}{br}$. Enfin au triangle rectangle GHO, l'on a R : *cos* AB : : GO : GH; & mettant les valeurs algébriques, $r : b :: d + \frac{acn}{br} : \frac{bd}{r} + \frac{acn}{rr} = cos\,AC$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

216. Donc en général dans un triangle sphérique quelconque, on aura les formules suivantes pour trouver un côté quelconque, lorsque l'on connoît les deux autres, & l'angle compris.

$$Cos\,AC = \frac{\pm cos\,B \times sin\,AB \times sin\,BC + R \times cos\,AB \times cos\,BC}{RR}.$$

$$Cos\,AB = \frac{\pm cos\,C \times sin\,AC \times sin\,BC + R \times cos\,AC \times cos\,BC}{RR}.$$

$$Cos\,BC = \frac{\pm cos\,A \times sin\,AB \times sin\,AC + R \times cos\,AB \times cos\,AC}{RR}.$$

COROLLAIRE II.

217. Il suit de ces formules que si l'on nomme V

le ſinus-verſe d'un angle quelconque C; on aura $V = \frac{R^2 \times \overline{cof(BC-AC) - cof AB}}{fin\,AC \times fin\,BC}$. Pour le démontrer, dans l'expreſſion de $cof\,AB$ trouvée au dernier corollaire, il n'y a qu'à mettre $R - V$ à la place de $cof\,C$, & l'on aura $cof\,AB \times RR = cof\,AC \times cof\,BC \times R + fin\,AC \times fin\,BC \times R - fin\,AC \times fin\,BC \times V$; mais (n°. 24.) $cof\,AC \times cof\,BC + fin\,AC \times fin\,BC = R \times cof\,(BC-AC)$; donc en ſubſtituant cette valeur après les réductions ordinaires, on trouvera $V = \frac{R^2 \times \overline{cof(BC-AC) - cof AB}}{fin\,AC \times fin\,BC} = \frac{2R \times \overline{cof(BC-AC) - cof AB}}{cof(BC-AC) - cof(BC+AC)}$, en mettant pour $fin\,AC \times fin\,BC$ ſa valeur déduite de ce que l'on a démontré au n°. 26.

COROLLAIRE III.

218. Si dans le numérateur de la premiere valeur de V à la place de $cof\,(BC-AC) - cof\,AB$, l'on ſubſtitue ſa valeur tirée de ce que l'on a démontré au n°. 58. On aura cette nouvelle expreſſion .... $V = \frac{2R \times (fin(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AC) \times fin(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}BC))}{fin\,AC \times fin\,BC}$; & parce que l'on a fait voir (n°.22.) que *fin. verſe* d'un angle $= \frac{2\,fin^2\,\frac{1}{2}\,angle}{R}$, on aura par cette derniere ſubſtitution $Sin^2\,\frac{1}{2}C = \frac{RR \times fin\left(\frac{AB+BC-AC}{2}\right) \times fin\left(\frac{AB+AC-BC}{2}\right)}{fin\,AC \times fin\,BC}$; & tirant les racines

$$Sin\,\tfrac{1}{2}C = \frac{R \times \sqrt{fin\left(\frac{AB+BC+AC}{2} - AC\right) \times fin\left(\frac{AB+AC+BC}{2} - BC\right)}}{\sqrt{fin\,AC \times fin\,BC}}$$

qui eſt la formule que nous avons déja trouvée dans le ſecond Chapitre pour avoir un angle quelconque d'un triangle dont on connoît les trois côtés; ce qui fait voir comment on peut découvrir toutes les formules en uſage par l'analyſe algébrique.

SCHOLIE.

219. Suppoſant toujours que l'on connoît les deux côtés d'un triangle & l'angle compris, on pourroit chercher le troiſieme côté par ſon ſinus. Ainſi connoiſſant les côtés AB, AC du triangle BAC avec l'angle A qu'ils comprennent, on pouroit demander le ſinus du troiſieme côté BC, & l'on trouveroit $c = \frac{\sqrt{b^2f^2q^2+2abfgqr+a^2g^2r^2+p^2f^2r^2}}{rr}$; expreſſion, comme l'on voit, trop compliquée pour en faire uſage dans la pratique des calculs.

PROBLEME IV.

220. *Connoiſſant deux angles ſur un côté, trouver* 1°, *un côté quelconque;* 2°, *le troiſieme angle.*

SOLUTION.

Soit AB le côté donné avec les angles A & B ſur ce côté; & ſoit AC l'un des côtés que l'on demande dont il faut par conſéquent regarder le ſinus ou coſinus comme inconnu. J'aurai d'abord fX ou *ſin* BC $= \frac{pf}{m}$ (n°.211.) je cherche enſuite l'expreſſion de HO par cette analogie *coſ* AB : *ſin* AB :: GH : HO, ou $b : a :: g : \frac{ag}{b} =$ HO. Nous avons auſſi CH $= \frac{fq}{r}$; donc CO $=$ HO $\pm$ CH (*fig.* 17 & 18) $= \frac{ag}{b} \pm \frac{fq}{r}$; mais au triangle rectangle CXO, l'on a R : *coſ* AB :: CO : CX, & en mettant les valeurs analytiques la proportion deviendra ... $r : b :: \frac{ag}{b} \pm \frac{fq}{r} : \frac{ag}{r} \pm \frac{bfq}{rr} =$ CX; enfin à cauſe des lignes proportionnelles MG, nG; fX, CX, on aura cette derniere analogie R : *coſ* B :: *ſin* BC ou fX : CX; & par algebre $r : n :: \frac{fp}{m} : \frac{ag}{t} \pm \frac{bfq}{rr}$, d'où l'on tire $\frac{nfp}{m}$

$= ag \mp \frac{bfq}{r}$, & par les réductions ordinaires $\frac{f}{g} = \frac{}{arr}$: c. à d. en ſubſtituant les valeurs des lettres.

$\frac{n}{m}p \mp bq$

tangente AC $= \frac{RR \times \textit{ſin}\,AB}{\textit{cot}\,B \times \textit{ſin}\,A \mp \textit{coſ}\,AB \times \textit{coſ}\,A}$.

Le ſigne — a lieu lorſque l'angle A eſt obtus, & c'eſt le ſigne + lorſque cet angle eſt aigu. On trouveroit pareillement *tang* AB $= \frac{RR \times \textit{ſin}\,AC}{\textit{cot}\,C \times \textit{ſin}\,A \mp \textit{coſ}\,AC \times \textit{coſ}\,A}$.

& *tang* BC $= \frac{RR \times \textit{ſin}\,AB}{\textit{cot}\,A \times \textit{ſin}\,B \mp \textit{coſ}\,AB \times \textit{coſ}\,B}$. C. Q. F. 1°. T.

2°. Pour avoir le troiſieme angle C, après avoir trouvé l'un quelconque des deux côtés; ſoit repriſe l'équation $\frac{nfp}{m} = ag \mp \frac{bfq}{r}$, de laquelle ſoit tirée une valeur de $\frac{am}{f} = \textit{ſin}\,C$, ce qui donnera $\frac{am}{f} = \frac{rnp \mp bmq}{gr}$

ou $\textit{ſin}\,C = \frac{\textit{ſin}\,A \times \textit{coſ}\,B}{\textit{coſ}\,AC} \mp \frac{\textit{coſ}\,AB \times \textit{coſ}\,A \times \textit{ſin}\,B}{R \times \textit{coſ}\,AC}$. C. Q. F. 2°. T.

PROBLEME V.

221. *Suppoſant les mêmes données qu'au problême précédent, trouver le troiſieme angle ſans y employer d'autres expreſſions que celles du côté & des angles donnés.*

SOLUTION.

Pour trouver plus aiſément les formules dont nous avons beſoin, nous ſuppoſerons que les deux angles connus ſont A & C avec le côté AC; ainſi l'angle B eſt celui qu'on demande, dont il faut par conſéquent traiter le ſinus *m* & le coſinus *n* comme inconnus. Nous aurons d'abord par la proportion connue entre les ſinus des angles & ceux des côtés oppoſés, *ſin* AB ou BK $= \frac{fh}{m}$ & *ſin* BC ou $fX = \frac{pf}{m}$; cela poſé dans le triangle GHO, l'on a *coſ* AB : *ſin* AB :: GH : HO ou $\frac{\sqrt{r^2m^2 - f^2h^2}}{m} : \frac{fh}{m}$: :

$g : \frac{gfh}{\sqrt{r^2m^2-f^2h^2}}$; on auſſi par conſtruction $R : cof A :: ſin AC : CH$ ou $r : q :: f : \frac{fq}{r} = CH$, donc $CO = HO \pm CH = \frac{gfh}{\sqrt{r^2m^2-f^2h^2}} \pm \frac{fq}{r}$; & à cauſe du triangle rectangle CXO, on a $R : cof AB :: CO : CX$; & en lettres, $r : \frac{\sqrt{r^2m^2-f^2h^2}}{m} :: \frac{fgh}{\sqrt{r^2m^2-f^2h^2}} \pm \frac{fq}{r} : \frac{fgh}{mr} \pm \frac{fq\sqrt{r^2m^2-f^2h^2}}{mrr} = CX$; enfin à cauſe des proportionnelles MG, nG, fX, CX, on aura $R : cof B :: fX : CX$, ou $r : n :: \frac{pf}{m} : \frac{fgh}{mr} \pm \frac{fq\sqrt{r^2m^2-f^2h^2}}{mrr}$, d'où l'on tire cette équation $\frac{pfn}{m} = \frac{fgh}{m} \pm \frac{fq\sqrt{r^2m^2-f^2h^2}}{mr}$; diviſant chaque membre par $\frac{f}{m}$, & faiſant diſparoître le radical, on aura $p^2n^2 - 2pghn + g^2h^2 = q^2m^2 - \frac{f^2h^2q^2}{r^2}$; mettant encore à la place de m^2 ſa valeur $r^2 - n^2$, & faiſant attention que $p^2 + q^2 = r^2$, on aura après avoir tout diviſé par r^2; $n^2 - \frac{2pghn}{rr} = q^2 - \frac{g^2h^2}{r^2} - \frac{f^2h^2q^2}{r^4}$; enfin complettant le quarré ſuivant les regles ordinaires des équations du ſecond degré, on trouvera, après différentes réductions & ſubſtitutions, que l'équation devient $n^2 - \frac{2pghn}{rr} + \frac{p^2g^2h^2}{r^4} = \frac{q^2k^2}{r^2}$, d'où l'on tire $n = \frac{pgh}{rr} \pm \frac{qk}{r}$, c'eſt-à-dire, que . . . . . .

$$Cof B = \frac{ſin A \times ſin C \times cof AC}{RR} \pm \frac{cof A \times cof C}{R}.$$

On trouveroit de même que . . . . . .

$$Cof C = \frac{ſin A \times ſin B \times cof AB}{RR} \pm \frac{cof A \times cof B}{R}$$ & que

$$Cof A = \frac{ſin B \times ſin C \times cof BC}{RR} \pm \frac{cof B \times cof C}{R}.$$ C. Q. F. T.

REMARQUE.

On auroit pu éviter tous les calculs que nous avons eu à faire pour réſoudre le dernier Problême, en ſe ſervant d'un triangle dont toutes les parties ſeroient ſupplémens de celles du triangle BAC, & appliquant à ce triangle la formule de l'art. 215. pour en tirer par les ſubſtitutions convenables la valeur du coſinus de l'angle cherché; mais j'ai mieux aimé trouver cette valeur directement, pour faire entendre davantage ces ſortes de ſolutions analytiques.

COROLLAIRE.

222. De la formule $tang\,AC = \frac{RR \times ſin\,AB}{cot\,B \times ſin\,A \mp coſ\,AB \times coſ\,A}$ donnée au n°. 220. on tirera aiſément les valeurs ſuivantes de la cotangente d'un côté quelconque, en renverſant la fraction, & mettant $cot\,AB$ pour $\frac{coſ\,AB}{ſin\,AB}$, & l'on trouvera $cot\,AC = \frac{cot\,B \times ſin\,A}{ſin\,AB} \mp cot\,AB \times coſ\,A = \frac{cot\,B \times ſin\,C}{ſin\,BC} \mp cot\,BC \times coſ\,C$.

PROBLEME VI.

223. *Connoiſſant deux côtés & l'un des angles oppoſés à ces côtés, trouver* 1°, *l'angle compris entre les deux côtés;* 2°, *le côté adjacent à l'angle donné.* (fig. 17).

SOLUTION.

Soient AB & AC les côtés qu'on ſuppoſe connus, avec l'angle B oppoſé au côté AC; & que l'angle A ſoit celui qu'il faut trouver. Pour cela dans l'équation $\frac{nfp}{m} = \frac{bfq}{r} + ag$ (trouvée au n°. 220.) il faut chercher une valeur de p ou de q ou de $\frac{p}{q}$ qui ſont le ſinus, coſinus & la tangente de l'angle A. Pour une plus grande facilité, nous ferons la tangente $\frac{m}{n}$ de l'angle B $= t$,

celle $\frac{f}{}$ du côté AC $= s$, ce qui donnera d'abord $p - \frac{at}{s} = \frac{g}{} \frac{btq}{rr}$, ou en mettant $\sqrt{r^2 - p^2}$ à la place de q, $p - \frac{at}{s} = \frac{bt\sqrt{r^2 - p^2}}{rr}$; d'où l'on tire cette équation du second degré $p^2 - \frac{2atr^4p}{s \times (r^4 + b^2t^2)} = \frac{b^2t^2r^2s^2 - a^2t^2r^4}{s^2 \times (r^4 + b^2t^2)}$, de laquelle il faut tirer la valeur de p. Le calcul fait, on trouvera $p = \frac{atr^4 \pm btr\sqrt{r^4s^2 + b^2t^2s^2 - a^2t^2r^2}}{s(r^4 + b^2t^2)}$. On trouvera de même la valeur du cosinus de cet angle en éliminant p au lieu de q, & l'on aura cette égalité ... $q = \frac{-af^2bt^2 \pm r^3\sqrt{r^4s^2 + b^2t^2s^2 - a^2t^2r^2}}{s \times (r^4 + b^2t^2)}$, d'où il seroit aisé de déduire l'expression analytique de la tangente du même angle. *C. Q. F.* 1°. *T.*

2°. Supposant toujours que les côtés donnés sont AB, AC avec l'angle B; & qu'il faille trouver le côté BC, il est visible que tout se réduit à trouver le sinus fX ou le cosinus GX de ce côté. Pour cela dans l'équation $\frac{pfn}{m} = \frac{bfq}{r} + ag$ dont nous avons fait usage, je chasse les inconnues p & q au moyen de leurs valeurs $\frac{cf}{m}$ & $\sqrt{r^2 - \frac{c^2f^2}{m^2}}$, dans lesquelles c doit être regardée comme inconnue; ce qui donnera $\frac{cffn}{mm} = \frac{bf}{mr}\sqrt{r^2m^2 - c^2f^2} + ag$, d'où il seroit aisé de tirer une valeur de c suivant les regles ordinaires; mais comme on arriveroit à une expression assez compliquée, il faut voir si l'on n'en pourroit pas trouver de plus simple en suivant l'analyse indiquée par la figure 17. Cela posé, dans le triangle rectangle GXT, on aura *cos* AB:R::GX:GT; ou $b : r :: d : \frac{dr}{b}$; donc TH $=$ GH $-$ GT $= g - \frac{dr}{b}$; le même triangle donne encore *cos* AB : *sin* AB : ;

GX : TX ; ou $b : a :: d : \frac{ad}{b}$; & à cauſe du triangle rectangle CHT, on a *ſin* AB : R :: TH : CT, ou $a : r :: g - \frac{rd}{b} : \frac{gr}{a} - \frac{drr}{ab}$. Donc CT + TX ou CX $= \frac{gr}{a} - \frac{drr}{ab} + \frac{ad}{b} = \frac{gr-bd}{a}$; enfin à cauſe des ordonnées au cercle & à l'ellipſe GM : Gn :: ƒX : CX ; ou en lettres $r : n :: \sqrt{rr-dd} : \frac{gr-bd}{a}$; d'où l'on tire ſur le champ $an\sqrt{rr-da} := grr - bdr$; équation au ſinus de BC beaucoup plus ſimple que la précédente, & de laquelle on déduira $d = \frac{r^3bg \pm anr\sqrt{r^2b^2 + a^2n^2 - r^2g^2}}{r^2b^2 + a^2n^2}$: on trouveroit de même en réſolvant une autre équation du ſecond degré que

ſin BC ou $c = \frac{anrrg \pm br^2\sqrt{a^2n^2 + b^2r^2 - g^2r^2}}{a^2n^2 + b^2r^2}$, d'où l'on tireroit auſſi une valeur de la tangente du même côté BC. *C. Q. F. 2°. T.*

PROBLEME VII.

224. *Connoiſſant deux angles & l'un des côtés oppoſés, trouver 1°, le côté adjacent ; 2°, le troiſieme angle ; 3°, le troiſieme côté.* (fig. 17).

SOLUTION.

Soient A & B les deux angles connus avec le côté AC oppoſé à l'angle B, & le côté AB eſt celui qu'on veut trouver. Pour cela dans l'équation $\frac{bfq}{r} + ag = \frac{fnp}{m}$ qui renferme toutes les données du Problême avec le ſinus *a* & le coſinus *b* du côté inconnu AB, il n'y a qu'à chercher l'une ou l'autre des quantités *a* & *b* traitée comme inconnue. Et pour ſimplifier le calcul autant qu'il ſera poſſible, on diviſera d'abord chaque membre de

l'équation par f, puis en mettant t pour la cotangente $\frac{g}{f}$ du côté AC, & s pour la cotangente $\frac{n}{m}$ de l'angle B, & faisant le sinus total égal à l'unité, l'équation deviendra $bq + at = ps$ ou $q\sqrt{rr-aa} = ps - at$, d'où l'on tire aisément en élevant tout au quarré, & résolvant l'équation du second degré

sin AB ou $a = \frac{pst \pm q\sqrt{r^2t^2 + q^2r^2 - p^2s^2}}{t^2+q^2}$, on trouveroit de même en éliminant a, & résolvant une semblable équation du second degré

cos AB ou $b = \frac{pqs \pm t\sqrt{r^2t^2 + q^2r^2 - p^2s^2}}{t^2+q^2}$; on aura donc le côté AB par le moyen de ces valeurs, au moyen desquelles il seroit aussi facile de trouver l'expression algébrique de la tangente du même côté AB. *C.Q.F.* 1°. *T.*

2°. Pour trouver l'angle C, je fais attention que l'analogie entre les sinus des angles & ceux des côtés opposés donne sin C $= \frac{am}{f}$; donc pour avoir l'expression du sinus de cet angle en n'y employant que les données du problême, on n'aura qu'à multiplier le sinus a du côté AB par $\frac{m}{f}$, ce qui donnera cette expression

sin C $= \frac{pst \pm q\sqrt{r^2t^2 + q^2r^2 - p^2s^2}}{t^2+q^2} \times \frac{f}{m}$. *C.Q.F.* 2°. *T.*

3°. Enfin pour avoir le troisième côté BC, il est visible qu'il n'y a qu'à se servir de l'analogie ordinaire, ce qui donnera sin BC $= \frac{\mathit{sin}\,\text{AC} \times \mathit{sin}\,\text{A}}{\mathit{sin}\,\text{B}}$. *C. Q. F.* 3°. *T.*

PROBLEME VIII.

225. *Connoissant les trois côtés d'un triangle quelconque, trouver un angle quelconque du même triangle.*

SOLUTION.

Soit reprise l'équation CX $= \frac{gr - bd}{a}$ trouvée au Pro-

blême VI. ſeconde Partie. La conſtruction de la figure donne $fX : CX :: MG : nG$; on aura donc auſſi $c : \frac{gr-bd}{a} :: r : cof\,B = \frac{grr-bdr}{ac}$, & en ſubſtituant à chaque lettre ſa valeur, on trouvera pour un angle quelconque B. $cof\,B = \frac{cof\,AC \times RR - cof\,AB \times cof\,BC \times R}{ſin\,AB \times ſin\,BC}$; on trouveroit de même $cof\,A = \frac{cof\,BC \times RR - cof\,AC \times cof\,AB \times R}{ſin\,AC \times ſin\,AB}$, & $cof\,C = \frac{cof\,AB \times RR - cof\,AC \times cof\,BC \times R}{ſin\,AC \times ſin\,BC}$. C. Q. F. T.

PROBLEME IX.

226. *Connoiſſant les trois angles d'un triangle ſphérique quelconque, trouver un côté quelconque.*

SOLUTION.

En ſuivant toujours l'analyſe que nous offre la conſtruction de la figure 17, il ſeroit aiſé d'arriver à une équation qui renfermeroit le coſinus d'un côté quelconque, exprimé ou combiné avec les données du problême ; mais au triangle DEF (*fig.* 11.) dont toutes les parties ſont ſuppléments de celles du triangle BAC, & dans lequel on connoît les trois côtés, on auroit $cof\,D = \frac{cof\,DF \times cof\,DE \times R - cof\,EF \times RR}{ſin\,DF \times ſin\,DE}$; donc puiſque l'angle D eſt ſupplément du côté AB, & que les arcs ſuppléments l'un de l'autre ont le même ſinus & le même coſinus, on aura par les ſuſtitutions indiquées par la figure, $cof\,AB = \frac{cof\,B \times cof\,A \times R - cof\,C \times RR}{ſin\,B \times ſin\,A}$, & l'on trouveroit de même $cof\,AC = \frac{cof\,A \times cof\,C \times R - cof\,B \times RR}{ſin\,C \times ſin\,A}$, & $cof\,BC = \frac{cof\,B \times cof\,C \times R - cof\,A \times RR}{ſin\,B \times ſin\,C}$. C. Q. F. T.

PREMIER SCHOLIE.

227. Si l'on compare les ſolutions des problêmes VI & VII, telles que l'analyſe nous les a fait découvrir avec celles que nous avons démontrées ſyntétiquement dans le ſecond Chapitre, on ne peut s'empêcher d'être frappé de la différence prodigieuſe qui ſe trouve entre les unes & les autres; on ſeroit même tenté de croire qu'il y a quelque maladreſſe dans l'analyſe algébrique, vu la complication des expreſſions qu'elle nous fait découvrir. Cette différence mérite d'être examinée avec la plus grande attention, & peut nous faire découvrir des vérités intéreſſantes, qui pourroient avoir des applications utiles. Je remarque d'abord que lorſque je réduis le triangle BAC (*fig.* 15.) en deux triangles rectangles pour en trouver les parties; ſi c'eſt l'angle A que je cherche, en ſuppoſant les côtés AB, AC connus avec l'un des angles B oppoſés à l'un des côtés connus, les opérations indiquées ſur la table générale des triangles obliquangles me font trouver cet angle par portions, en me donnant la cotangente de la premiere partie BAD & le coſinus de la ſeconde partie CAD; tandis que l'analyſe algébrique ne ſuppoſe pas une telle diviſion de l'angle BAC, & qu'elle cherche à découvrir tout d'un coup le ſinus ou le coſinus de l'angle entier BAC. C'eſt donc de cette différente maniere de procéder à la ſolution du problême, que vient auſſi la différence des ſolutions qui n'eſt, dans le vrai, qu'une différence apparente. Pour m'en convaincre encore plus ſûrement, ſoit nommé x le ſinus de l'angle BAD; la formule

cot premier ſeg. de l'angle = *tang* angle donné × *coſ* côté adj. donnera $r\sqrt{rr-xx} = btx$, en gardant les dénominations employées au problême VI. d'où l'on tire x ou *ſin* BAD $= \frac{r^3}{\sqrt{r^4+b^2t^2}}$, & par conſéquent

$cof\,BAD = \frac{btr}{\sqrt{r^4+b^2t^2}}$. La ſeconde formule du même article de la même table donne $cof\,CAD = \frac{atrr}{s\sqrt{r^4+b^2t^2}}$ & partant auſſi $ſin\,CAD = \frac{r\sqrt{r^4s+b^2t^2s^2-a^2t^2r^2}}{s\sqrt{r^4+b^2t^2}}$; donc au moyen de ces valeurs à cauſe que BAC = BAD $\pm$ CAD, il ſera facile d'avoir le ſinus de ce même angle tout entier par le moyen de la formule du n°. 23. $ſin\,(A \pm B) = \frac{ſin\,A \times cof\,B \pm ſin\,B \times cof\,A}{R}$, en ſuppoſant que BAD = A & que CAD = B, d'où l'on tire ſur le champ $p = \frac{r^3 \times atr \pm btr\sqrt{r^4s^2+b^2t^2s^2-a^2t^2r^2}}{s\times(r^4+b^2t^2)}$ qui eſt préciſément la même que nous avons trouvé en réſolvant directement l'équation du ſecond degré du problême VI. On voit donc à préſent comment ces deux ſolutions reviennent au même, quoique très-différentes en apparence. On voit de plus avec quelle facilité la Trigonométrie ſphérique peut réſoudre par deux analogies des équations du ſecond degré qui préſenteroient des radicaux très-compliqués.

Second Scholie pour les Triangles ſphériques rectangles.

228. On peut encore remarquer une autre différence entre les ſolutions ſyntétiques & analytiques des Problêmes de Trigonométrie ſphérique. Les premieres ne doivent la ſimplicité de leurs formules qu'à ce que l'on a commencé par les cas les plus ſimples, auxquels on a ramené les cas généraux plus compoſés. Dans les dernieres au contraire, on ne ſuppoſe la ſolution d'aucun cas particulier plus ſimple que le général. Ces cas particuliers ſont tous renfermés dans la formule générale, & peuvent s'en déduire avec la plus grande facilité. Auſſi rien de plus aiſé que de tirer de ces formules toutes celles qui ont rapport aux triangles ſphériques rectangles,

en faisant attention que le sinus d'un angle droit est égal au rayon, & que son cosinus est zéro. Par exemple de la formule du n°. 214. . . . . $Tang\ B = \frac{sin\ A \times R\,R}{sin\ AB \times cot\ AC \pm cof\ AB \times cof\ A}$, en supposant l'angle A de 90°, on tire $tang\ B = \frac{tang\ AC \times R}{sin\ AB}$, de même la formule du n°. 216, $cof\ BC = \frac{R \times cof\ AB \times cof\ AC \pm cof\ A \times sin\ AB \times sin\ AC}{R\,R}$ donnera $cof\ BC = \frac{cof\ AB \times cof\ AC}{R}$. Par les mêmes suppositions, la formule du n°. 220 donne . . . . . $tang\ AC = \frac{sin\ AB \times tang\ B}{R}$ & $tang\ AB = \frac{sin\ AC \times tang\ C}{R}$ & $tang\ BC = \frac{tang\ AB \times R}{cof\ B}$. Les formules de l'art. 221, donneront $cof\ B = \frac{sin\ C \times cof\ AC}{R}$, $cof\ C = \frac{sin\ B \times cof\ AB}{R}$. De la valeur de p trouvée au n°. 223, on tire, en supposant un angle droit $sin\ B = \frac{(tang^2\ BC - tang^2\ AB) \times R}{sin\ AB \times tang\ BC}$. La formule du cosinus dans la même supposition de l'angle B droit, se réduira d'abord à $q = \frac{abr^2t^2}{s^2b^2t^2}$, parce que le radical s'évanouit en comparaison de ce terme, ce qui donne pour un triangle dont B seroit droit, $R \times cof\ A = tang\ AB \times cot\ AC$; & si c'est l'angle A qui est droit, on aura $cof\ B \times R = tang\ AB \times cot\ BC$. Pareillement de la formule trouvée au second article du même n°. $d = \frac{r^3bg \pm \sqrt{\&c.}}{r^2b^2 \times a^4n^2}$ à cause de $n = 0$, l'on tire tout de suite $d = \frac{rg}{b}$, ce qui donnera pour un triangle BAC rectangle en A, $cof\ AC = \frac{cof\ BC \times R}{cof\ AB}$ & pour le sinus, $sin\ AC = \frac{\sqrt{cof^2\ AB - cof^2\ BC}}{cof\ AB}$. De même encore la pre-

miere formule du n°. 224 donne $R \times \sin AB = \tang AC \times \cot B$, parce que le radical s'évanouit étant multiplié par $q = 0$. Dans la seconde formule au contraire, il n'y a que le radical qui demeure, & qui se réduit à cette équation $b = \frac{r\sqrt{t^2 - s^2}}{t}$ ou $\cos AB = \frac{r \times \sqrt{\tang^2 AC - \tang^2 B}}{\tang AC}$; enfin connoissant, outre l'angle droit, les deux angles sur l'hypoténuse, les formules du n°. 225 donneront celles-ci . . . $\cos AB = \frac{\cos C \times R}{\sin B}$, $\cos AC = \frac{\cos B \times R}{\sin C}$ & $\cos BC \times R = \cot B \times \cot C$. D'où l'on voit qu'en jettant un coup d'œil sur toutes ces formules, il eût été facile d'arriver au Théorême de *Néper* par le moyen des formules algébriques, comme par les considérations syntétiques. Pour faire voir encore davantage la généralité de toutes ces formules, on pourroit en faire l'application aux différents problêmes de la Trigonométrie rectiligne. Les Commençants pourront s'exercer à ces sortes de recherches. Nous ajouterons encore ici quelques considérations sur les constructions expliquées aux numéros 204 & 205.

PROBLEME X.

229. Supposant que d'un angle quelconque d'un triangle sphérique quelconque BAC (*fig.* 21.) l'on ait abaissé une perpendiculaire sur le côté opposé prolongé s'il est nécessaire; *Trouver en sinus, cosinus, tangentes ou cotangentes.* 1°, *Les rapports des segments de la base aux angles adjacents.* 2°, *Les rapports des mêmes segments avec les côtés correspondants.* 3°, *Les rapports des segments de l'angle vertical aux côtés adjacents.* 4°, *Les rapports des segments du même angle aux angles sur la base.*

SOLUTION.

Imaginons que du point C l'on ait abaiſſé la perpendiculaire CP ſur le côté AB prolongé s'il eſt néceſſaire. Il eſt viſible que les arcs AP & BP ainſi que les angles AGP, BGP meſurés par ces arcs ſeront les ſegments formés par la perpendiculaire CP. Il eſt pareillement évident que la moitié G'C de la corde G'Cg' ſera le ſinus de cette même perpendiculaire; & par conſéquent GC ſera le coſinus de ce même arc. Cela poſé; dans le triangle rectangle GHC on aura d'abord . . . . . R : CG ou *coſ* CP : : *ſin* AP : CH; & à cauſe des proportionnelles *r*G, *d*G, *l*H, CH; on a . . . . . *coſ* A : R : : CH : *ſin* AC; donc en multipliant ces deux proportions par ordre on aura cette autre proportion . . . *coſ* A : *coſ* CP : : *ſin* AP : *ſin* AC; on trouveroit de même *coſ* B : *coſ* CP : : *ſin* BP : *ſin* BC, d'où l'on tire ſur le champ *ſin* AP : *ſin* BP : : *ſin* AC × *coſ* A : *ſin* BC × *coſ* B : : *ſin* B × *coſ* A : *ſin* A × *coſ* B : : $\frac{\text{ſin B}}{\text{coſ B}} : \frac{\text{ſin A}}{\text{coſ A}}$: : *tang* B : *tang* A : : *cot* A : *cot* B; ce qui ſe trouve tout de ſuite, en ſubſtituant dans le ſecond rapport *ſin* B : *ſin* A au lieu de *ſin* AC : *ſin* BC. D'où il ſuit que *les ſinus des ſegments de la baſe ſont entr'eux comme les cotangentes des angles adjacents. C. Q. F.* 1°, *T. & D.*

2°, A cauſe que l'angle GCH eſt complément de l'arc AP, & que pareillement l'angle GCX eſt complément de l'arc BP, le triangle GHC donnera R : *coſ* CP : : *coſ* AP : GH = *coſ* AC. Pareillement le triangle GCX donnera R : *coſ* CP : : *coſ* BP : GX = *coſ* BC; donc puiſque ces deux proportions ont le même premier rapport, on aura *coſ* AP : *coſ* BP : : *coſ* AC : *coſ* BC; c'eſt-à-dire, *que les coſinus des ſegments de la baſe ſont comme ceux des côtés correſpondants. C. Q. F.* 2°, *T. & D.*

On prouveroit de même qu'en abaiſſant la perpendiculaire Aδ ſur la baſe BC on auroit *ſin* Bδ : *ſin* Cδ : : *cot* B : *cot* C & que *coſ* Bδ : *coſ* Cδ : : *coſ* AB : *coſ* AC.

3°,

3°, Suppoſons qu'en effet on ait abaiſſé la perpendiculaire $A\delta$, & que l'on conſidere actuellement les ſegments $BA\delta$, $CA\delta$ de l'angle BAC. On a vu ci-devant (n°. 206.) que $R\theta = A\delta$; ce qui donne $\theta\zeta$ égal au coſinus de cet arc perpendiculaire $A\delta$. Cela poſé, à cauſe des proportionnelles RG, ρG; $\theta\zeta$, $Z\zeta$, & parce que ρG eſt viſiblement égal au coſinus de l'angle $BA\delta$, on aura R : *cof* $BA\delta$: : *cof* $A\delta$: $Z\zeta$; de plus à cauſe que ZG = *ſin* B (n°. 205) & que l'angle ZGζ eſt égal au complément de AB, on aura *cof* AB : R : : $Z\zeta$: *ſin* B; donc en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura . . . . . *cof* AB : *cof* $BA\delta$ :: *cof* $A\delta$: *ſin* B on trouveroit de même que *cof* AC : *cof* $CA\delta$ :: *cof* $A\delta$: *ſin* C donc on aura auſſi *cof* $BA\delta$: *cof* $CA\delta$: : *ſin* B × *cof* AB : *ſin* C × *cof* AC : : *ſin* AC × *cof* AB : *ſin* AB × *cof* AC : : $\frac{\textit{cof}\,AB}{\textit{ſin}\,AB} : \frac{\textit{cof}\,AC}{\textit{ſin}\,AC}$: : *cot* AB : *cot* AC; c'eſt-à-dire, que *les coſinus des ſegments de l'angle vertical ſont comme les cotangentes des côtés adjacents.*

4°, De la proportion entre les ſinus des côtés & les ſinus des angles oppoſés dans les triangles rectangles $A\delta B$, $A\delta C$, on tire *ſin* $BA\delta$ × *ſin* $A\delta$ = *ſin* $B\delta$ × *ſin* B, & *ſin* $CA\delta$ × *ſin* $A\delta$ = *ſin* $C\delta$ × *ſin* C; on aura donc *ſin* $BA\delta$: *ſin* $CA\delta$: : *ſin* $B\delta$ × *ſin* B : *ſin* $C\delta$ × *ſin* C : : *coſ* B : *coſ* C, à cauſe que *ſin* $B\delta$: *ſin* $C\delta$: : *cot* B : *cot* C, commme on l'a démontré à la fin du ſecond article : c'eſt-à-dire, *que les ſinus des ſegments de l'angle vertical ſont comme les coſinus des angles ſur la baſe.* C. Q. F. 4°, T. & D.

SCHOLIE.

230. On voit donc comment on a pu trouver par l'analyſe, ſoit algébrique ſoit géométrique, tous les Théorêmes néceſſaires à la réſolution des triangles rectangles ou obliquangles ; en appliquant l'une & l'autre aux conſtructions graphiques expliquées dans le Chapitre

précédent, on verra de plus qu'il y avoit encore pluſieurs moyens de découvrir toutes ces vérités. Par exemple, on auroit pu arriver aux dernieres analogies, par la conſidération des ſécantes intérieures $r\delta\omega\mu$, $n\delta\varepsilon\varphi'$. De même, ſi l'on fait attention que les arcs $p\gamma$, $p\beta$ ſont les meſures des ſegments ACP, BCP formés par l'arc perpendiculaire CP avec les côtés de l'angle C, on verra qu'on auroit également trouvé les dernieres analogies par le moyen des lignes $\gamma\Lambda$, $l'\lambda$; $\beta\Phi$, $f'\varphi$, conſidérées comme ſécantes intérieures.

Si l'on ſuppoſe de plus que le triangle ſphérique devienne un triangle rectiligne, il ſera facile de reconnoître ce que deviennent les quatre analogies que nous avons trouvées. La premiere *ſin* Bδ : *ſin* Cδ : : *cot* B : *cot* C devient Bδ : Cδ : : *cot* B : *cot* C, c'eſt-à-dire, que dans un triangle rectiligne *les ſegments de la baſe formés par une perpendiculaire abaiſſée de l'angle oppoſé ſont comme les cotangentes des angles adjacents.* En effet, ſi l'on regarde Aδ comme ſinus total, ces lignes ſeront les tangentes des ſegments de l'angle BAC, qui ſont chacun complément des angles ſur la baſe. La ſeconde analogie devient $\infty : \infty :: \infty : \infty$. La troiſieme donne *les coſinus des ſegments de l'angle vertical, réciproquement comme les côtés oppoſés*; ce qui ſuit néceſſairement de ce que les trois angles d'un triangle ne valent que deux droits. Enfin la derniere analogie devient une proportion dont les termes ſont identiquement les mêmes deux à deux par la même raiſon, en comparant les antécédents & les conſéquents entr'eux.

COROLLAIRE.

231. Si l'on ſuppoſe préſentement que l'arc Aδ diviſe l'angle BAC en deux également, à cauſe que les angles AδB, AδC qui ſont alors ſuppléments l'un de l'autre, ont un même ſinus; on aura *ſin* AδB : *ſin* AB : : *ſin* BAδ : *ſin* Bδ & *ſin* AδC : *ſin* AC : : *ſin* CAδ :

sin CA. D'où il suit que dans ce cas les sinus des segments sont comme les sinus des côtés qui leur sont opposés ; & par conséquent dans un triangle rectiligne ces segments seront entr'eux comme les côtés opposés, lorsque l'on aura divisé l'angle compris entre ces côtés en deux également.

SCHOLIE.

232. En jettant un coup d'œil sur toutes les formules que l'analyse algébrique nous a fait découvrir, on voit que pour trouver le logarithme de la grandeur inconnue, il s'agit presque toujours de chercher celui de la somme ou de la différence de deux quantités données. Comme nous avons déja indiqué la méthode de faire cette opération, il nous suffira d'en faire l'application à quelques exemples.

EXEMPLE PREMIER.

233. Supposons qu'au triangle BAC (*fig.* 11.) on connoît les deux côtés AB & BC avec l'angle B qu'ils comprennent ; savoir, le côté AB $= 41° 9'$, BC $= 71° 30'$ & ABC $= 27° 8'$; l'on demande l'angle en A par la formule (trouvée n°. 214) . . . . . $Tang\ A = \frac{sin\ B \times RR}{sin\ AB \times cot\ BC - cos\ AB \times cos\ B}$; nous prenons le signe —, parce que l'angle en A doit être aigu. Il est visible que toute la difficulté se réduit à trouver le logarithme du dénominateur, ce qui se fera aisément en regardant *sin* AB × *cot* BC comme un angle, & *cos* AB × *cos* B comme un autre angle, puis cherchant le sinus de leur différence par la formule *sin* A — *sin* B $= 2 cos\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times sin\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ (n°. 97).

Opération par Logarithmes.

$9.818247 = log.\ sin\ AB.$	$9.948331 = log.\ cos\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right).$
$9.524520 = log.\ cot\ BC.$	$9.403790 = log.\ sin\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right).$
$9.342767 = log.\ sin\ 12°\,43'\,20'' = B.$	$0.301030 = log.\ de\ 2.$
$9.876789 = log.\ cos\ AB.$	$19.653151 \cdot\ log.\ à\ soustraire.$
$9.949364 = log.\ cos\ B.$	$de\ 29.659025 = log.\ sin\ B \times RR.$
$9.826153 = log.\ sin\ 42°\ 4'\,35'' = A.$	$10.005874 = log.\ tang\ 45°\,23'\,14''.$

Exemple II.

234. Supposant les mêmes données que dans l'exemple précédent, il faut trouver le 3e côté AC par la formule $cos\,AC = \frac{cos\,B \times sin\,AB \times sin\,BC + cos\,AB \times cos\,BC \times R}{RR}$. Je regarde cette quantité comme l'expression d'un sinus égal à la somme des sinus de deux angles, & je me sers de la formule $sin\,A + sin\,B = sin\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) \times cos\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right)$. Cela posé, l'opération n'a plus aucune difficulté, & s'achevera comme il suit.

$9.949364 = log.\ cos\ B.$	$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = 23°\,46'\,44''.$
$9.818247 = log.\ sin\ AB.$	$comp.\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right) = 80\ 2'\,39''.$
$9.976957 = log.\ sin\ BC.$	$9.605529 = log.\ sin\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right).$
$9.744568 = log.\ sin\ 33°\,44'\,5'' = A.$	$9.993410 = log.\ cot\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B\right).$
$9.876789 = log.\ cos\ AB.$	$0.301030 = log.\ de\ 2.$
$9.501476 = log.\ cos\ BC.$	$9.899969 = log.\ cos\ 37°\,24'\,54''.$
$9.378265 = log.\ sin\ 13°\,49'\,23'' = B.$	

Exemple III.

235. Supposons présentement que l'on connoît les trois côtés AB, AC & BC du triangle BAC : savoir, AB = 41° 9′ ; AC = 52° 35′ 6″ & BC = 71° 50′, il s'agit de trouver un angle quelconque de ce triangle ; l'angle A, par exemple, en se servant de la formule ... $cos\,A = \frac{cos\,BC \times RR - cos\,AC \times cos\,AB \times R}{sin\,AB \times sin\,BC}$. Cette expression se construira par la formule $sin\,A - sin\,B$ du no. 93 :

le reſte de l'opération s'achevera comme on le voit ici.

$9.899969 = log.\ cof AC.$
$9.876789 = log.\ cof AB.$

$9.776758 = log.\ fin\ 36°\ 43'\ 56'' = A.$
$cof BC = 18°\ 30'\ 0'' = B.$

$A + B = 55°\ 13'\ 56''$ donc $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = 27°\ 36'\ 58''.$
$A - B = 18°\ 13'\ 56''$ $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B = 9°\ 6'\ 58''.$

$comp.Arit.fin\ AB = 0.181753.$
$comp.Arit.fin\ BC = 0.623043.$
$logarith.\ de\ 2 = 0.301030.$
$log.cof(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) = 9.947469.$
$log.fin(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}B) = 9.199851.$

$9.653146\ log\ cof\ 63°\ 15'\ 39'' = cof A.$

236. Puiſque les problêmes VI & VII (des n°s 223 & 224) nous ont fait tomber dans des équations du ſecond degré, on voit qu'il peut arriver dans certaines équations que l'on ſoit obligé de réſoudre des équations de cette nature; & comme d'ailleurs tous les calculs d'Aſtronomie pratique ſe font par les Logarithmes, il ne ſera pas inutile d'indiquer ici la maniere de trouver ces ſolutions par les Tables des Sinus. C'eſt par quoi nous ajouterons encore ici les deux Problêmes ſuivants.

PROBLEME.

237. *Conſtruire par les Tables des Sinus les racines de l'équation* $x^2 \pm 2ax = bb$.

SOLUTION.

D'un point quelconque C avec le rayon $CA = a$ (*fig.* 24), on décrira un cercle ADB*d*; à l'extrémité du rayon CA, l'on élevera AL perpendiculaire à ce même rayon, & qui ſoit égale à la quantité *b*. Enfin par le centre C & le point L, on ménera la ligne LDC*d* terminée à la circonférence en *d*. On ſait que les parties LD, L*d* ſeront les racines de l'équation, comme cela ſe démontre dans l'application de l'Algébre à la Géométrie; ce qui eſt d'ailleurs facile à reconnoître, puiſque la tangente AL

& la sécante L*d* donneront L*d* : LA : : LA : LD, ou algébriquement $a + \sqrt{aa+bb} : b :: b :$ LD (x). D'où l'on tire $ax + x\sqrt{aa+bb} = bb$, ou $x\sqrt{aa+bb} = bb - ax$; & en élevant tout au quarré effaçant ce qui se détruit, & divisant le reste par bb; $x^2 + 2ax = bb$.

Cela posé, pour ramener cette construction aux Logarithmes des Tables, soit encore élevée la ligne droite FL*f* perpendiculaire à l'extrémité de AL, & terminée en F, *f* aux prolongements des cordes AD, A*d*; enfin soient encore tirées les cordes BD, B*d*. Tout ceci bien conçu, il est aisé de voir que dans le triangle rectangle CAL l'angle ACL se déterminera par cette analogie : CA (a) : AL : (b) : : r : *tang* ACL. Ensuite à cause des triangles semblables BDA, ALF on aura BD : DA : : AL : LF = LD (x). Mais l'angle ABD est évidemment la moitié de l'angle ACL qu'on vient de trouver, on aura donc R : *tang* $\frac{1}{2}$ A CL : : AL (b) : LF ou LD (x). Donc on aura la valeur de x par les Logarithmes, au moyen des deux proportions que l'on vient de voir. *C. Q. F.* 1°, *T.*

2°, Si l'on nomme L*d*, x, on trouvera que la même proportion donne l'équation $x^2 - 2ax = bb$. Dans ce cas, il faut faire $a : b$: : le rayon est à la tangente d'un angle, que cette regle de Trois fera trouver. Ensuite à cause des triangles rectangles semblables B*d*A, AL*f* on aura B*d* : *d*A : : AL : L*f*; on a auſſi B*d* : *d*A : : Le rayon est à la cotangente de la moitié de l'angle BC*d* = ACL; donc on aura encore le rayon est à la cotangente de la moitié de l'angle trouvé par notre derniere proportion, comme la quantité b est à la ligne A*f* qui sera la racine positive de l'équation $xx - 2ax = bb$. *C. Q. F.* 2°, *T.*

PROBLEME.

238. *Construire par les Tables des Sinus les racines de l'équation* $x^2 \pm 2ax + bb = 0$ (fig. 25).

SOLUTION.

A l'extrémité du rayon CA = a ſoit élevée une perpendiculaire AL = b; & par L ſoit menée la ligne LFf parallele à AB, laquelle coupera le cercle conſtruit ſur AB en deux points F & f, ou même ne le touchera qu'en un ſeul point, ſi le Problême eſt poſſible; & donnera les racines LF, Lf qui ſeront celles de l'équation $x^2 \pm 2ax + bb = 0$. Car nommant FL, x; à cauſe de la tangente AL & de la ſécante Lf, on aura Lf ($a + \sqrt{aa - bb}$) : AL (b) : : AL (b) : LF (x). D'où l'on tire aiſément par le produit des extrêmes & des moyens $x^2 + 2ax + bb = 0$; on auroit trouvé pareillement $x^2 - 2ax + bb = 0$, ſi l'on eût nommé Lf, x. Cela poſé, ſi l'on tire encore les lignes AF, Af, FB, FC, FD, fd, on aura d'abord au triangle rectangle CDF, CF : FD ou $a : b$: : le rayon eſt au ſinus de l'angle FCD; enſuite à cauſe des triangles ſemblables BFA, FDA, on aura BF : FA : : FD : DA; mais l'angle en B eſt évidemment la moitié de l'angle au centre ACF, & l'on aura BF : FA : : R : *tang* $\frac{1}{2}$ FCA. Donc auſſi R : *tang* $\frac{1}{2}$ FCA : : FD (b) : AD (x). D'où il ſuit que l'on connoîtra AD ou x, puiſque les trois premiers termes de cette proportion ſont connus.

2°, Si l'on nomme Lf, x, on aura encore à cauſe des triangles ſemblables AFB; fdA; AF : BF : : fd : dA = Lf ou r : *cotang* $\frac{1}{2}$ FCA : : b : x. C. Q. F. T.

239. On trouve quelquefois dans l'Aſtronomie des Problêmes qui conduiſent à des équations du troiſieme degré, & particuliérement dans les calculs des mouvements des Cometes dans un orbe parabolique, c'eſt pourquoi on ſera bien aiſe de voir ici comment on peut réſoudre ces ſortes d'équations par les Table des Sinus & de leurs Logarithmes. Avant de donner ces ſolutions, il eſt bon de ſe rappeller en peu de mots ce qui a rapport

à ces équations en général. Quant à la démonſtration de ces différents articles, il faudra avoir recours à ce que M. CLAIRAUT a donné ſur cette matiere dans ſes Eléments d'Algebre.

Nous ſuppoſerons donc comme des vérités démontrées dans tous les éléments d'Algebre:

1°, Que toute équation du troiſieme degré peut ſe réduire à la forme $x^3 \pm px \pm q = 0$, dans laquelle on a fait évanouir le ſecond terme.

2°, Que des racines de l'équation $x^3 + px \pm q = 0$, il y en a néceſſairement deux qui ſont imaginaires & une réelle.

3°, Que l'équation $x^3 - px \pm q = 0$, on aura néceſſairement deux racines imaginaires toutes les fois que $\frac{1}{27} p^3$ ſera moindre que $\frac{1}{4} qq$.

4°, Qu'au contraire la même équation aura ſes trois racines réelles toutes les fois que $\frac{1}{27} p^3$ toujours négatif ſera plus grand que $\frac{1}{4} qq$; ce qui conſtitue le cas que l'on a nommé *cas irréductible*.

Quoique ces conſidérations ne ſoient pas abſolument néceſſaires pour comprendre les ſolutions que nous allons donner, & qui en ſont indépendantes; néanmoins elles ſerviront à faire connoître que ces mêmes ſolutions renferment tous les cas poſſibles des équations du troiſieme degré, en commençant d'abord par les réduire à n'avoir point de ſecond terme, comme cela ſe pratique aiſément par les transformations ordinaires.

PROBLEME I.

240. *Trouver les trois racines d'une équation du troiſieme degré de la forme* $x^3 - px \pm q = 0$, *en ſuppoſant* $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$; *c'eſt-à-dire, dans le cas irréductible.*

SOLUTION.

On prendra l'équation $4x^3 - 3r^2x \pm ry^2 = 0$, dans

laquelle on suppose r plus grand que y, afin d'avoir $\frac{1}{27}p^3$ plus grand que $\frac{1}{4}q^2$, & qui par le moyen de l'indéterminée y pourra représenter toutes les équations du troisieme degré qui appartiendront au cas irréductible. Cela posé, si le dernier terme a le signe $+$, on fera $y = \sin A$, & la circonférence du cercle $= C$, ce qui donnera pour les racines de l'équation :

$$x = \sin\frac{A}{3}.\ x = \sin\frac{A+C}{3},\ x = \sin\frac{A+2C}{3}.$$

Si le dernier terme de l'équation a le signe $-$, on fera $y = \cos A$, & les racines de l'équation $4x^3 - 3r^2x - r^2y = 0$ seront $x = \cos\frac{A}{3}$; $x = \cos\frac{A+C}{3}$; $x = \cos\frac{A+2C}{3}$. La démonstration de cette pratique se déduit sur le champ des formules générales démontrées au n°. 54 & 55 sur les sinus & cosinus des arcs multiples. *C. Q. F. D.*

PROBLEME II.

241. *Trouver les racines de l'équation* $x^3 - px \mp q$ *dans laquelle on suppose* $\frac{1}{27}p^3$ *plus petit que* $\frac{1}{4}qq$, *c'est-à-dire, lorsque cette équation aura deux racines imaginaires.*

SOLUTION.

On prendra comme ci-devant l'équation $4x^3 - 3r^2x \mp r^2y$, dans laquelle on suppose $r < y$; afin d'avoir $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. Et d'abord si l'on suppose que le dernier terme ait le signe $-$, on fera $y = \text{cosécante } 2A$, laquelle deviendra nécessairement connue toutes les fois que y sera déterminée. Ensuite on cherchera un angle B, tel que l'on ait $\cot^3 B = r^2 \cot A$, & la valeur de x sera $\text{cosec } 2B$. Si le dernier terme a le signe $+$, alors il faudra regarder y comme la cosécante d'un angle obtus, & le problême se résolvera de la même maniere. *C. Q. F. T.*

PROBLEME III.

242. *Trouver les racines de l'équation* $x^3 \pm px \mp q = 0$ *laquelle a néceſſairement deux racines imaginaires, à cauſe que* $\frac{1}{27}p^3$ *ſera néceſſairement poſitif.*

SOLUTION.

On prendra toujours l'équation $4x^3 + 3r^2x \mp r^2y = 0$ dans laquelle on fera $y = cotang\ 2A$, & l'on cherchera un angle B, tel que l'on ait $cotang^3 B = r^2\ cotang\ A$. La valeur de l'inconnue ſera $x = cotang\ 2B$. *C. Q. F. T.*

Démonſtration des deux dernieres Solutions.

243. Soit que r ſoit plus grande ou plus petite que y, il eſt toujours vrai de dire que l'équation $4x^3 - 3r^2x - r^2y = 0$, eſt la même que celle-ci $(x + \sqrt{x^2 - r^2})^3 = r^2 (y + \sqrt{y^2 - r^2})$ comme on va le demontrer, d'où il ſuit que la valeur d'x en y tirée de la ſeconde, réſolvera la premiere équation : tout ſe réduit donc à prouver l'identité de ces deux expreſſions. Pour cela, je remarque d'abord que par les formules du n°. 29, on a eſſentiellement $4x^3 - 3r^2x - r^2y = 0$.

Cela poſé, ſuppoſons pour un inſtant que l'on ait $(x + \sqrt{x^2 - r^2})^3 = r^2 (y + \sqrt{y^2 - r^2})$ en faiſant le cube indiqué, on aura $4x^3 - 3r^2x - r^2y + (4x^2 - r^2)\sqrt{x^2 - r^2} = -r^2\sqrt{y^2 - r^2}$ dans laquelle je retrouve les termes $4x^3 - 3r^2x - r^2y$ que je fais déja être égaux à zéro. Ainſi tout ſe réduit à prouver que $\overline{4x^2 - r^2} \times \sqrt{x^2 - r^2} = -r^2\sqrt{y^2 - r^2}$. Pour cela, j'éleve tout au quarré, & je trouve $16x^5 - 24r^2x^4 + 9r^4x - r^6 = r^4y^2 - r^6$, ou ce qui revient au même $16x^6 - 24r^2x^4 + 9r^4x^2 = r^4y^2$, laquelle eſt préciſément le quarré de l'équation $4x^3 - 3r^2x = r^2y$. D'où ſuit la

vérité de ce qu'il falloit prouver. Mais si l'on suppose r plus petit que y comme nous l'avons fait, & $y = cosécante$ de 2A, on aura $\sqrt{y^2 - r^2} = cotang\ 2A$. Pareillement si $x = cosec\ 2B$; $\sqrt{x^2 - r^2}$ sera *cotang* 2B. Donc en substituant ces valeurs dans l'équation . . . $(x + \sqrt{x^2 - r^2})^3 = r^2(y + \sqrt{y^2 - r^2})$ on aura cette nouvelle équation $(cosec\ 2B + cotang\ 2B)^3 = r^2\ (cosec\ 2A + cot\ 2A)$. Et à cause que par la formule du n°. 89 on a $cosec\ 2A + cot\ 2A = cotang\ A$; on aura par cette substitution dans chaque membre de la derniere équation $cot^3\ B = r^2\ cot\ A$. D'où il est aisé de trouver *cot* B, lorsque A est connu, & par conséquent d'avoir la valeur de x que nous avons fait $= cosec\ 2B$. *C. Q. F.* 1°, *D.*

2°, L'on prouvera de même que l'équation $4x^3 + 3r^2x - r^2y = 0$ est identiquement la même que $(x + \sqrt{x^2 + r^2})^3 = r^2\ (y + \sqrt{y^2 + r^2})$. Et supposant, comme nous l'avons fait, $y = cotang\ 2A$ & $x = cotang\ 2B$, elle deviendra $(cotang\ 2B + cosécante\ 2B)^3 = r^2\ (cotang\ 2A + cosec\ 2A)$; & en dernier lieu $cot^3\ B = r^2\ cot\ A$, d'où il sera facile d'avoir l'arc désigné par B par la valeur de A, & par conséquent *cot* 2B qui est la valeur de l'inconnue x dans l'équation. *C. Q. F.* 2°, *D.*

Pour faire encore mieux sentir l'avantage de ces solutions, nous en ferons tout de suite l'application à des exemples particuliers.

EXEMPLE I.

244. *Trouver les racines de l'équation* $x^3 - 3x - 1 = 0$, *laquelle doit avoir ses trois racines réelles, à cause que* $\frac{1}{27}\ p^3$ *est négatif & plus grand que* $\frac{1}{4}\ qq$.

SOLUTION.

Pour comparer cette équation avec l'équation $4x^3 - 3r^2x - r^2y = 0$, je commence par diviser tous les

termes de cette derniere par 4, & je trouve $x^3 - \frac{3}{4}r^3x - \frac{1}{4}r^2y = 0$, qui donne $\frac{3}{4}r^2 = 3$, d'où l'on tire $r = 2$, & par conſéquent $y = 1$.

A cauſe que le dernier terme eſt négatif, il faudra, ſuivant ce que nous avons dit au premier Problême n°. 240, faire $y = cof\,A$; & parce que ce coſinus eſt la moitié du ſinus total, il faut qu'il ſoit le ſinus d'un angle de 30°, donc on aura $A = 60°$. Par conſéquent les valeurs de x ſeront $cof\,20°$, $cof\,140°$, $cof\,260°$, ou $x = fin\,70°$, $x = -fin\,50°$, $x = -fin\,10°$ pour un rayon qui ſeroit exprimé par 2. C'eſt à-dire, que les valeurs réelles de x ſont doubles des ſinus des Tables qui répondent aux angles trouvés.

EXEMPLE II.

245. *Trouver les racines de l'équation* $x^3 - x - 6 = 0$, *laquelle doit avoir néceſſairement deux racines imaginaires, à cauſe que* $\frac{1}{27}p^3$ *eſt plus petit que* $\frac{1}{4}q^2$.

SOLUTION.

Je compare cette équation avec l'équation $4x^3 - 3r^2x - r^2y = 0$; après avoir diviſé tous les termes de cette derniere par 4, & je trouve $\frac{3}{4}r^2 = 1$, ce qui me donne $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$, & $y = 18$ que je dois faire égal à $cofec\,2A$. Pour trouver cet angle dans les Tables, je fais d'abord cette proportion :

$\frac{2}{\sqrt{3}} : 18 ::$ le ſinus total des Tables qui eſt $1 : 9\sqrt{3}$ qui eſt l'expreſſion d'une coſécante. Enſuite, parce que l'on a coſécante $A = \frac{rr}{fin\,A}$, j'aurai $fin\,2A = \frac{rr}{cofec\,2A}$; ce qui ſe trouvera par les Logarithmes, en ôtant du double du Logarithme du ſinus total celui de $9\sqrt{3}$, & l'on trouvera $fin\,2A = 0{,}807196$ ou $8{,}807196$ ſelon la caractériſtique des Tables. Ce nombre répond à 3° 40′ 40″ ; donc $A = 1°\,50'\,20''$.

Préſentement pour avoir l'angle B qui doit déterminer la valeur de x par la coſécante du double de cet angle : au nombre 11,493417 j'ajoute le double du Logarithme du ſinus total, & j'en prends le tiers, ce qui me donne *cot* B = *cot* 17° 37′ 50″ ; & partant B = 17° 37′ 50″ dont la coſécante du double, c'eſt-à-dire, la ſécante de 54° 44′ 20″ multipliée par $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ſera la racine demandée de l'équation propoſée.

EXEMPLE III.

246. *Trouver les racines de l'équation* $25x^3 + 75x - 46 = 0$ *qui a néceſſairement deux racines imaginaires, à cauſe que le ſecond terme a le ſigne* +.

SOLUTION.

Pour comparer cette équation avec l'équation $4x^3 + 3r^2x - r^2y = 0$, je commence par diviſer tous les termes de cette derniere par 4, & ceux de la propoſée par 25 ; ce qui me donne ces deux nouvelles équations $x^3 + \frac{3}{4}r^2x - \frac{1}{4}r^2y = 0$, & $x^3 + 3x - \frac{46}{25} = 0$, d'où je tire par la comparaiſon des termes correſpondants $r = 2$ & $y = \frac{46}{25}$. Pour découvrir quel eſt l'angle A tel que $\frac{46}{25}$, ſoit la cotangente de ſon double, je fais cette proportion: Le rayon 2 que je viens de trouver eſt à $\frac{46}{25}$: : le ſinus total des Tables 1,000000 eſt à la cotangente d'un angle, qui eſt celui que nous avons nommé 2A dans le troiſieme problême. Faiſant l'opération par les Logarithmes, je trouve 10,036212 qui répond à la tangente de 47° 23′ 10″ ; par conſéquent A = 23° 41′ 35″ ; avec cette valeur de A on trouvera comme au problême précédent B = 37° 13′ 54″, & la tangente de complément du double de cet angle étant multipliée par 2, à cauſe que nous avons trouvé $r = 2$, ſera la racine de cette équation. *C. Q. F. T.*

OBSERVATION.

Nous remarquerons que cette ſolution des équations du 3e degré par le cercle, donne auſſi néceſſairement celles des équations du 4e degré, puiſque les équations du 4e degré ſe réduiſent à une du troiſieme ; comme cela ſe démontre dans tous les Traités d'Algebre. On obſervera de plus qu'il ſeroit facile de trouver dans chaque degré des équations qui ſe réſolveroient comme celles-ci par le cercle ; mais elles ne pourroient pas réſoudre de la même maniere tous les cas de ces équations. Ce que nous avons dit ici, ſuffit pour l'uſage ordinaire.

CHAPITRE CINQUIEME.

Des Analogies différentielles des Triangles ſphériques & rectilignes quelconques.

PREMIERE SECTION.

LEMME PREMIER.

247. *La différentielle d'un arc* (fig. 26) *eſt à celle du ſinus du même arc, comme le rayon eſt au coſinus du même arc.*

DÉMONSTRATION.

Soit un arc quelconque AM que je nommerai z dont le ſinus ſoit MP que je déſignerai par s, le coſinus CP que je nommerai u, la tangente AT $= t$ & la ſécante CT $= y$. Il faut prouver que $dz : ds :: r : u$.

Suppoſons que l'arc AM ſoit devenu A*m*, & ſoient tirées les lignes C*mt*, *mp*; ſoit de plus décrit du centre C avec le rayon CT l'arc TS. Enfin par le point M ſoit menée M*r* parallele à CA : il eſt viſible par cette conſtruction que l'on aura M*m* = dz, *mr* = *ds*, M*r* = — *du* (à cauſe que l'arc AM augmentant, ſon coſinus diminue), & T*t* = *dt*, *t*S = *dy*. Cela poſé, à cauſe des triangles ſemblables *mr*M, CPM, on aura CM (*r*) : CP (*u*) : : M*m* (dz) : *mr* (*ds*). *C. Q. F. D.*

LEMME SECOND.

248. *La différentielle d'un arc eſt à celle de ſa tangente, comme le quarré du rayon eſt au quarré de la ſécante;* c'eſt-à-dire, que l'on aura $dz : dt :: r^2 : yy$. (*fig.* 26).

DÉMONSTRATION.

A cauſe des ſecteurs ſemblables CM*m*, CTS on aura CM (*r*) : CT (*y*) : : M*m* (dz) : TS = $\frac{ydz}{r}$. De plus les triangles rectangles CAT, TS*t* ſont auſſi ſemblables, puiſque, lorſque les lignes CT, C*t* ſont prêtes à coïncider, l'angle en *t* ne differe point de l'angle en T. Ainſi l'on aura CA : CT : : ST : T*t*, ou $r : y : : \frac{ydz}{r} : dt$, d'où l'on tire ſur le champ $dz : dt :: rr : yy$. *C. Q. F. D.*

LEMME TROISIEME.

249. *La différentielle d'un arc eſt à celle de ſa ſécante, comme le quarré du rayon eſt au produit de la ſécante par la tangente*, c'eſt-à-dire, que l'on aura $dz : dy : : r^2 : ty$.

DÉMONSTRATION.

Il eſt viſible que S*t* eſt la différentielle de la ſécante, mais nous avons déja trouvé ST = $\frac{ydz}{r}$; donc en comparant encore les côtés homologues des triangles ſem-

blables CAT, TSt, on aura CA : AT : : ST : St, ou $r : t : : \frac{ydz}{r} : dy$, d'où l'on déduit ſur le champ $d\zeta$: $dy : : rr : ty$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

250. Donc en réuniſſant ces différentes expreſſions, on aura pour la différentielle ou la fluxion d'un arc quelconque ζ, $d\zeta = \frac{rds}{u} = -\frac{rdu}{s}$ (en ſe ſervant de la fluxion du coſinus) $= \frac{rrdt}{yy} = \frac{udt}{y} = \frac{r^2dy}{ty} = \frac{rudt}{ys}$. On trouveroit avec la même facilité des formules pour les cotangentes ou les coſécantes; celles-ci nous ſuffiront pour tout ce que nous aurons à démontrer dans ce Chapitre.

SCHOLIE.

251. On auroit pu démontrer ces différentes analogies par les formules que nous avons expoſées au premier Chapitre. Par exemple, le Lemme premier auroit pu ſe conclure immédiatement du num. 86. *ſin* (A + B) = *ſin* A × *coſ* B + *ſin* B × *coſ* A. Car on a *d ſin* AM = *ſin* (AM + *m*M) — *ſin* AM. Mais pour un arc évanouiſſant $d\zeta$, le coſinus eſt égal au rayon ou à l'unité, & le ſinus de ce même arc $d\zeta$, ſe confond avec cet arc lui-même. On aura donc *ſin* $(\zeta + d\zeta) = ſin\ \zeta + \frac{dz\ coſ z}{r} = s + \frac{udz}{r}$; donc $d\,s$ ou *ſin* $(\zeta + d\zeta) - s = s + \frac{udz}{r} - s = \frac{udz}{r}$. Les autres formules auroient pu ſe déduire avec la même facilité des formules expliquées au premier Chapitre.

LEMME IV.

252. *Si des trois angles d'un triangle ſphérique quelconque* BAC *comme poles* (fig. 11) *on décrit ſur la ſurface de la ſphere un nouveau triangle ſphérique* DEF; *je dis*

dis que les variations des angles D, E, F *de ce nouveau triangle ſeront reſpectivement égales à celles des côtés oppoſés* AB, AC & BC *du triangle* BAC ; *& les variations des côtés* DE, EF & DF *du même triangle ſeront les mêmes que celles des angles oppoſés du triangle* BAC, *& réciproquement pour les variations des parties du triangle* BAC *à l'égard des parties du triangle* DEF.

DÉMONSTRATION.

Cette propoſition eſt une ſuite évidente de ce que l'on a démontré au n°. 131, & de ce que les angles ſupplémens l'un de l'autre ont néceſſairement le même ſinus, même coſinus, même tangente, cotangente, ſécante & coſécante. *C. Q. F. D.*

II. SECTION.

Des variations d'un Triangle ſphérique ou rectiligne quelconque, dans lequel on ſuppoſe un angle conſtant, ainſi que le côté qui lui eſt adjacent.

THÉOREME I.

253. *Si dans un triangle ſphérique quelconque* BAC (fig. 27) *on ſuppoſe un angle quelconque comme* A, *conſtant avec le côté* AC *adjacent à cet angle ; on aura toujours cette analogie : La différentielle de l'autre côté adjacent à l'angle conſtant eſt à celle du côté oppoſé, comme le rayon eſt au coſinus de l'angle oppoſé au côté conſtant* ; c'eſt-à-dire, ſuivant nos ſuppoſitions pour la figure 27 que . . . . . $d\,AB : d\,BC :: R : cos\,B$.

DÉMONSTRATION.

Suppoſant que le côté AB ſoit devenu $A\beta$, c'eſt-à-dire, qu'il ſoit augmenté de la petite quantité $B\beta$; ſi l'on tire $C\beta$, & que ſur ce côté on prenne $Cb = CB$ en décrivant du pole C le petit arc de cercle Bb ; $b\beta$ ſera l'aug-

mentation ou la fluxion du côté CB ; & le petit triangle $Bb\beta$ ſera rectangle en b, & pourra être regardé comme rectiligne, à cauſe de la petiteſſe de ſes côtés ; ainſi les côtés de ce petit triangle ſeront comme les ſinus des angles oppoſés. Mais l'angle en β eſt ſenſiblement égal à l'angle B, & par conſéquent l'angle $\beta B b$ ſera complément de ce même angle ; on aura donc $B\beta : b\beta :: R : cof B$, ou $d AB : d BC :: R : cof B$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

254. De cette proportion & des formules démontrées au Chapitre précédent, on déduira aiſément les analogies ſuivantes. Le n°. 225 donne en ſubſtituant à *cof* B ſa valeur $d AB : d BC :: ſin AB \times ſin BC : R \times cof AC - cof AB \times cof BC$. & (n°. 221) $:: R : \frac{cof AC \times ſin A \times ſin C}{RR} - \frac{cof A \times cof C}{R}$. Si l'angle en A eſt de 90°, $:: RR : cof AC \times ſin C :: tang BC : tang AB$ (n°. 228).

COROLLAIRE II.

255. Si le triangle eſt rectiligne, on aura toujours dans les mêmes ſuppoſitions $d AB : d BC :: R : cof B$.

THEOREME II.

256. *Suppoſant les mêmes choſes qu'au Théorême précédent, je dis que la différentielle du côté variable adjacent à l'angle conſtant eſt à celle de l'angle oppoſé à ce côté, comme le ſinus du côté oppoſé à l'angle conſtant eſt au ſinus de l'angle oppoſé au côté conſtant ;* c'eſt-à-dire, en appliquant cette analogie à la figure 27 ; que l'on aura $d AB : d C :: ſin BC : ſin B$.

DÉMONSTRATION.

Soient prolongés les côtés CB, Cb, juſqu'à ce qu'ils ayent chacun 90°. Il eſt clair que l'arc Ff ſera la meſure de la variation de l'angle C. Cela poſé, à cauſe que les petits arcs Ff, Bb ſont d'un même nombre de degrés,

on aura $Ff : B\beta :: R : \sin BC$; d'ailleurs à cause du triangle $B\beta\beta$. $B\beta : B\beta :: \sin B : R$; donc en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $Ff : B\beta :: \sin B : \sin BC$ ou $dC : dAB :: \sin B : \sin BC$, & *invertendo* $dAB : dC :: \sin BC : \sin B$. *C. Q. F. D.*

Corollaire I.

257. Si à la place de $\sin B$ & de $\sin BC$, on substitue à ces quantités leurs différentes valeurs déduites de la proportion entre les sinus des angles & ceux des côtés opposés, on trouvera cette suite de rapports égaux; $dAB : dC :: \sin^2 BC : \sin AC \times \sin A :: \sin AC \times \sin A : \sin^2 B :: \sin BC \times \sin AB : \sin C \times \sin AC :: \sin A \times \sin^2 B :: \sin AC \times \sin^2 C$.

Corollaire II.

258. Si le triangle est rectiligne, alors le sinus du côté BC se confond avec le côté BC lui-même; ainsi le Théorême devient $dAB : dC :: BC : \sin B$.

Théoreme III.

259. *La différentielle du côté opposé à l'angle constant est à celle de l'angle variable adjacent au côté constant, comme le sinus de ce côté multiplié par le cosinus de l'autre angle, est au produit du sinus de ce même autre angle par le rayon; c'est-à-dire, que l'on aura* $dBC : dC :: \sin BC \times \cos B : R \times \sin B :: \sin BC : tang\ B$.

Démonstration.

Puisque l'on a (n°. 253) $dBC : dAB :: \cos B : R$, & que par le Théorême dernier on a $dAB : dC :: \sin BC : \sin B$, on aura en multipliant par ordre $dBC : dC :: \sin BC \times \cos B : R \times \sin B :: \sin BC : tang\ B$. *C. Q. F. D.*

Corollaire I.

260. Si l'on substitue à $\sin BC$ sa valeur $\frac{\sin AC \times \sin A}{\sin B}$

on aura cette nouvelle analogie dBC : dC : : *sin* A × *sin* AC : *tang* B × *sin* B : : *sin*² BC × *cot* AC — *sin* BC × *cos* BC × *cos* C : R² × *sin* C.

COROLLAIRE II.

261. Si le triangle eſt rectiligne, les mêmes ſuppoſitions donneront dBC : dC : : BC : *tang* B. Car le ſinus de BC devient le côté BC lui-même.

THÉOREME IV.

262. *Suppoſant toujours les mêmes conditions, je dis que la différentielle du côté adjacent à l'angle conſtant, eſt à la différentielle de l'angle adjacent à ce côté ; comme la tangente du côté oppoſé à l'angle conſtant eſt au ſinus de l'angle oppoſé au côté conſtant* ; c'eſt-à-dire, que l'on aura dAB : dB : : *tang* BC : *sin* B.

DÉMONSTRATION.

Suivant les ſuppoſitions du Théorême, dans le triangle DEF (*fig.* 11) dont toutes les parties ſont, par conſtruction, ſuppléments de celles du triangle BAC ; l'angle en E & le côté DE qui lui eſt adjacent, ſeront conſtants. De plus par le Lemme IV de ce chapitre, les variations de l'angle D & du côté DE ſeront reſpectivement les mêmes que celles du côté AB & de l'angle B du triangle BAC; mais par le dernier Théorême on a dDF : dD : : *sin* DF : *tang* F ; donc parce que les angles ſuppléments l'un de l'autre ont même tangente & même ſinus, on aura, en ſubſtituant à ces quantités, leurs correſpondantes au triangle BAC, & faiſant un *invertendo* dAB : dB : : *tang* BC : *sin* B. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

263. Puiſque l'on a dAB : dB : : *tang* BC : *sin* B, & qu'on a auſſi (n°. 256) dC : dAB : : *sin* B : *sin* BC, on trouvera, en multipliant ces deux proportions par ordre dB : dC : : *sin* BC : *tang* BC : : *cos* BC : R : :

$cof A \times R + cof B \times cof C : fin B \times fin C$ (n°. 263) :: $cof A \times fin AC \times fin AB + cof AC \times fin AB \times R : R^3$, en mettant pour *cofin* BC sa valeur (n°. 216).

COROLLAIRE II.

264. Si le triangle est rectiligne, alors *fin* BC = *tang* BC; d'où il suit que les variations de chacun des deux angles sont égales; ce qui doit nécessairement arriver, puisque dans un triangle rectiligne quelconque la somme des trois angles est toujours une quantité constante; & que d'ailleurs nous avons supposé un angle constant.

III. SECTION.

Des variations d'un triangle sphérique ou rectiligne quelconque dans lequel on suppose un angle constant avec le côté qui lui est opposé.

THÉOREME V.

265. SUPPOSANT *au triangle* BAC (fig. 28) *l'angle en* A *constant avec le côté* BC *qui lui est opposé; on aura toujours la différentielle d'un angle quelconque à celle du côté opposé, comme la tangente de cet angle est à la tangente du côté opposé;* c'est-à-dire, que l'on aura ces deux analogies: dB : dAC :: *tang* B : *tang* AC ou dC : dAB :: *tang* C : *tang* AB.

DÉMONSTRATION.

Puisque l'angle en A du triangle BAC avec le côté BC qui lui est opposé demeurent constants, & que la proportion entre les sinus des angles & ceux des côtés qui leur sont opposés, donne $fin\ C = \frac{fin\ A}{fin\ BC} \times fin\ AB$; & $fin\ B = \frac{fin\ A}{fin\ BC} \times fin\ AC$; il est clair que les variations de *fin* C & *fin* B seront comme celles des sinus des côtés AB, AC qui leur sont opposés; ce qui donnera $d\,fin\ C = d\,fin\ AB$. Donc (n°. 250) la variation de l'arc qui mesure

l'angle C, ſera à celle de l'arc AB :: $\frac{d.\,\mathit{ſin}\,C}{\mathit{coſ}\,C} : \frac{d.\,\mathit{ſin}\,AB}{\mathit{coſ}\,AB}$; ou, ce qui revient au même, $d\,C : d\,AB :: \frac{d.\,\mathit{ſin}\,C}{\mathit{coſ}\,C} \cdot \frac{d.\,\mathit{ſin}\,AB}{\mathit{coſ}\,AB}$ mais $d\,\mathit{ſin}\,C : d\,\mathit{ſin}\,AB :: \mathit{ſin}\,C : \mathit{ſin}\,AB$; puiſque le rapport de *ſin* C : *ſin* AB doit être un rapport conſtant : donc en ſubſtituant ces quantités à leurs proportionnelles & enſuite les tangentes auxquelles elles ſe changent, on aura $d\,C : d\,AB :: \mathit{tang}\,C : \mathit{tang}\,AB$. On feroit voir de même que $d\,B : d\,AC :: \mathit{tang}\,B : \mathit{tang}\,AC$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

266. Si A = 90°, on aura $d\,C : d\,AB :: R : \mathit{ſin}\,AC$, & pareillement $d\,B : d\,AC :: R : \mathit{ſin}\,AB$ (n°. 228).

COROLLAIRE II.

267. Si le triangle eſt rectiligne, les variations des angles B & C ſont égales ; puiſque la ſomme des trois angles, ainſi que l'un de ces angles, ſont des quantités conſtantes. De plus les tangentes des côtés AB, AC ſe confondent avec ces côtés mêmes, ainſi l'on aura : *La différentielle d'un angle quelconque eſt à celle du côté oppoſé, comme la tangente de cet angle eſt au même côté oppoſé*, ou $d\,C : d\,AB :: \mathit{tang}\,C : AB$, ou à cauſe que $d\,C = d\,B$; $d\,B : d\,AB :: \mathit{tang}\,C : AB$ & $d\,C : d\,AC :: \mathit{tang}\,B : AC$.

THÉOREME VI.

268. *Suppoſant toujours un angle conſtant avec le côté qui lui eſt oppoſé, les variations des côtés ſeront comme les coſinus des angles oppoſés, & celles des angles comme les coſinus des côtés qui leur ſont oppoſés* ; c'eſt-à-dire, que $d\,AB : d\,AC :: \mathit{coſ}\,C : \mathit{coſ}\,B$, & que $d\,B : d\,C :: \mathit{coſ}\,AC : \mathit{coſ}\,AB$ (*fig.* 28).

DÉMONSTRATION.

Ayant pris $Db = DB$, & $Dc = DC$, il eſt viſible que les angles en *b* & *c* ſeront des angles droits, & de plus que $bc = \beta\gamma$; ôtant de ces quantités égales la partie commune βc, on aura $\beta b = c\gamma$. Cela poſé dans le

triangle rectangle βb B, on aura Bβ : $b\beta$: : R : *cos* B; & dans le triangle rectangle C$c\gamma$, on a auſſi $c\gamma$: Cγ : : *cos* C : R; donc en multipliant par ordre, on aura Bβ : Cγ : : *cos* C : *cos* B ; ou *d* AB : *d* AC : : *cos* C : *cos* B. *C. Q. F.* 1°, *D.*

2°, En conſidérant le triangle DEF (*fig.* 11) dont toutes les parties ſont ſuppléments de celles du triangle BAC, on trouveroit *d* DE : *d* EF : : *cos* E : *cos* D. Donc en ſubſtituant à chaque terme leurs correſpondants du triangle BAC, on aura *d* B : *d* C : : *cos* AC : *cos* AB. *C. Q. F.* 2°, *D.*

COROLLAIRE I.

269. Puiſque l'on a *d* AB : *d* AC : : *cos* C : *cos* B, on aura auſſi (n°. 225) : : *cos* AB × *ſin* AB × R — *cos* AC × *cos* BC × *ſin* AB : *cos* AC × *ſin* AC × R — *cos* AB × *cos* BC × *ſin* AC ; & puiſque l'on a auſſi *d* C : *d* B : : *cos* AB : *cos* AC, on aura auſſi en mettant pour *cos* AC ſa valeur, & diviſant les deux derniers termes par *cos* AB ; *d* C : *d* B : : $\frac{\textit{cos}\,B \times \textit{ſin}\,B \times \textit{tang}\,AB}{RR} + \textit{cos}\,BC : R$.

COROLLAIRE II.

270. Puiſque l'on a par le Théorême V *d* AB : *d* C : : *tang* AB : *tang* C, & que par le Théorême préſent *d* C : *d* B : : *cos* AB : *cos* AC, en multipliant ces deux proportions par ordre on aura . . . . . *d* AB : *d* B : : R × *ſin* AB : *tang* C × *cos* AC ; on trouveroit de même que . . . . . *d* AC : *d* C : : R × *ſin* AC : *tang* B × *cos* AB.

Si l'on ſubſtitue dans ces deux proportions à *ſin* AB & à *ſin* AC leurs valeurs reſpectives $\frac{\textit{ſin}\,AC \times \textit{ſin}\,C}{\textit{ſin}\,B}$ & $\frac{\textit{ſin}\,AB \times \textit{ſin}\,B}{\textit{ſin}\,C}$, on aura ces nouvelles analogies :

d AB : *d* B : : *tang* AC × *cos* C : R × *ſin* B

& . . : *d* AC : *d* C : : *tang* AB × *cos* B : R × *ſin* C.

Pareillement, ſi l'on ſubſtitue encore dans la premiere

proportion à *cosin* AC sa valeur $\frac{\sin AC \times R}{tang\ AC}$, on trouvera dAB : dB : : *tang* AC × *sin* AB : *tang* C × *sin* AC : : *tang* AC×*cos* BC — *sin* AC×*cos* AB : $\frac{\sin B \times \sin AC \times \sin AB}{R}$.

Enfin, si l'on suppose l'angle A de 90°, on aura dans la derniere proportion dAC : dC : : $\frac{1}{2}$ *sin* 2AC : R × *cot* C; en mettant pour *tang* B sa valeur $\frac{cot\ C \times R}{cos\ BC}$ & pour *cos* AB sa valeur; & mettant pour *sin* AC × *cos* AC l'expression qui lui est égale par le n°. 14.

COROLLAIRE III.

271. Si le triangle est rectiligne, les variations des côtés seront toujours comme les cosinus des angles opposés; & les variations des angles comme les cosinus des côtés opposés. Mais dans ce cas, les côtés étant ou pouvant être considérés comme des arcs infiniment petits, leurs cosinus seront tous égaux. Donc les différences des angles seront aussi égales entr'elles, comme on peut s'en convaincre d'ailleurs.

IV. SECTION.

Des variations d'un triangle sphérique ou rectiligne, lorsque deux de ses côtés demeurent constants.

THÉOREME VII.

272. *La variation de l'angle compris entre les deux côtés constants est à la variation d'un quelconque des deux autres angles, comme le produit du sinus total par le sinus du côté variable, est au produit du sinus du côté opposé à cet angle par le cosinus de l'autre angle adjacent à ce même côté;* c'est-à-dire, qu'en supposant les côtés AB, AC constants (*fig.* 29)

on aura dA : dB : : R × *sin* BC : *sin* AC × *cos* C

ou bien dA : dC : : R × *sin* BC : *sin* AB × *cos* B.

DÉMONTRATION.

Suppoſant que l'angle BAC ſoit devenu BA*c* ; ſoient prolongés les côtés AC, A*c* juſqu'à ce qu'ils ſoient des quarts de cercle ACF, A*cf*. Il eſt clair que F*f* ſera la meſure de la variation de l'angle en A. Soient pareillement prolongés les côtés BC, B*c* en G & *g*; enſorte que BCG, B*cg* ſoient des quarts de cercle : il eſt encore viſible que G*g* ſera la meſure de la variation de l'angle en B. Enfin ſoit pris ſur le côté B*c* l'arc Bγ = BC, ce qui donnera le triangle Cγ*c* rectangle en γ, dans lequel l'angle γ*c* C eſt ſenſiblement égal au complément de l'angle C. Cela poſé, à cauſe des ſecteurs ſemblables F*f*, C*c* on aura . . . . . F*f* : C*c* :: R : *ſin* AC, & à cauſe du triangle rectangle Cγ*c*,

on a . . . C*c* : Cγ :: R : *cof* C, &

à cauſe des ſecteurs ſemblables G*g*, Cγ,

on a auſſi Cγ : G*g* :: *ſin* BC : R. Donc

en multipliant ces trois proportions par ordre, & mettant pour F*f* & G*g* leurs valeurs,

on aura *d* A : *d* B :: R × *ſin* BC : *ſin* AC × *cof* C;

on prouveroit de même

que. *d* A : *d* C :: R × *ſin* BC : *ſin* AB × *cof* B. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

273. Si dans la premiere proportion on met à la place de *ſin* AC ſa valeur $\frac{\textit{ſin}\,\text{BC} \times \textit{ſin}\,\text{B}}{\textit{ſin}\,\text{A}}$, on trouvera *d* A : *d* B :: R × *ſin* A : *ſin* B × *cof* C; & ſi l'on multiplie chaque terme du dernier rapport par $\frac{\textit{ſin}\,\text{C}}{\textit{cof}\,\text{C}}$, on trouvera :: *ſin* BC × *tang* C : *ſin* AC × *ſin* C :: *ſin* A × *tang* C : *ſin* B × *ſin* C, en remettant pour *ſin* BC ſa valeur $\frac{\textit{ſin}\,\text{AC} \times \textit{ſin}\,\text{A}}{\textit{ſin}\,\text{B}}$ :: *ſin* BC × *tang* C : *ſin* B × *ſin* AB, en faiſant diſparoître *ſin* C dans l'un des rapports précédents. Si l'on met dans la premiere proportion la valeur de *cof* C (n°. 225) on

aura encore : : $\sin^2 BC : \cos AB \times R - \cos AC \times \cos BC$; ou bien mettant encore dans la même premiere proportion pour $\sin BC$ ſa valeur $\frac{\sin AB \times \sin A}{\sin B}$: : $\sin AB \times \sin A$: $\sin AC \times \frac{1}{2} \sin 2C$. Enfin : : $R^3 : \sin^2 B \times \cos AB - \sin B \times \cos B \times \cot A$, en ſubſtituant dans $\sin AC \times \cos C$ les valeurs des quantités qui s'y trouvent $\frac{\sin BC \times \sin B}{\sin A}$ & $\cos AB \times \sin A \times \sin B - \cos A \times \cos B \times R$; & mettant $\cot A$ pour $\frac{\cos A}{\sin A}$, ou bien encore : : $R^3 : \cos AB \times RR - \sin AB \times \cos B \times \cot BC$, en faiſant diſparoître $\cot A$.

COROLLAIRE II.

274. Des ſubſtitutions ſemblables dans la ſeconde proportion donneroient les rapports ſuivants $d A : d C$: : $R \times \sin A : \sin C \times \cos B$: : $\sin BC \times tang B : \sin AB \times \sin B$: : $tang BC \times \sin BC : \sin AC \times \sin C$: : $tang B \times \sin A : \sin B \times \sin C$: : $\sin^2 BC : \cos AC \times R - \cos AB \times \cos BC$.

COROLLAIRE III.

275. Si le triangle eſt rectiligne, les ſinus des côtés deviennent les côtés mêmes; ce qui donne $d A : d B : R \times BC : AC \times \cos C$; & $d A : d C$: : $R \times BC : AB \times \cos B$; c'eſt-à-dire, que les variations de l'angle compris entre les côtés conſtants, & de l'un quelconque des deux autres angles, *ſont en raiſon compoſée de la directe des côtés oppoſés à ces angles, & de celle du rayon au coſinus de ce même angle.*

THÉOREME VIII.

276. *La variation de l'angle compris entre les côtés conſtants eſt à celle du côté qui lui eſt oppoſé, comme le quarré du rayon eſt au rectangle du ſinus d'un angle quelconque par le ſinus du côté qui lui eſt adjacent;* c'eſt-à-dire, que l'on aura toujours $d A : d BC$: : $R^2 : \sin C \times \sin AC$: : $R^2 : \sin B \times \sin AB$ (*fig.* 29).

DÉMONSTRATION.

Les ſecteurs ſemblables Ff, Cc donnent, comme nous l'avons déja vu, $Ff : Cc :: R : \mathit{fin}\ AC$; & le petit triangle rectangle $G\gamma c$ donne $Cc : \gamma c :: R : \mathit{fin}\ C$. Donc en multipliant par ordre on aura $Ff : \gamma c :: RR : \mathit{fin}AC \times \mathit{fin}C$, ou $dA : dBC :: RR : \mathit{fin}\ A \times \mathit{fin}C$. Si l'on veut faire varier l'angle A vers B, on auroit trouvé de même $dA : dBC :: RR : \mathit{fin}\ AB \times \mathit{fin}\ B$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

277. Si l'on ſubſtitue à $\mathit{fin}\ AC$ ſa valeur, on aura $dA : dBC :: R^2 \times \mathit{fin}\ A : \mathit{fin}\ BC \times \mathit{fin}\ B \times \mathit{fin}\ C :: R^2 \times \mathit{fin}\ BC \times \mathit{fin}\ C : \mathit{fin}^2\ AB \times \mathit{fin}\ A \times \mathit{fin}\ B$, en mettant pour $\mathit{fin}\ AC$ ſa valeur $\frac{\mathit{fin}\ AB \times \mathit{fin}\ B}{\mathit{fin}\ A}$, & ſubſtituant de même $\frac{\mathit{fin}\ AB \times \mathit{fin}\ A}{\mathit{fin}\ BC}$ pour $\mathit{fin}\ C$.

COROLLAIRE II.

278. Si le triangle eſt rectiligne, on aura $dA : dBC :: R^2 : AC \times \mathit{fin}\ C :: R^2 : AB \times \mathit{fin}\ B :: R : AD$ (en ſuppoſant que AD eſt une perpendiculaire abaiſſée de l'angle A ſur le côté BC oppoſé) ce qui apprend que ſi deux côtés d'un triangle rectiligne ſont conſtantes, *les variations de l'angle compris entre ces côtés & du côté oppoſé à cet angle variable, ſont comme le rayon eſt à la perpendiculaire abaiſſée de cet angle variable ſur le côté oppoſé.*

THÉOREME IX.

279. *La variation d'un angle quelconque adjacent au côté variable eſt à celle de ce même côté, comme la cotangente de l'autre angle ſur ce côté eſt au ſinus de ce côté*; c'eſt-à-dire, que l'on aura $dC : dBC :: \mathit{cot}\ B : \mathit{fin}\ BC$, & $dB : dBC :: \mathit{cot}\ C : \mathit{fin}\ BC$ (*fig.* 29).

DÉMONSTRATION.

Puiſque l'on a (n°. 272) $dA : dC :: R \times \mathit{fin}\ BC :$

fin AB × *cof* B, & (n°. 276) *d*BC : *d*A : : *fin* C × *fin* AC : R², en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura *d*BC : *d*C : : *fin* BC × *fin* C × *fin* AC : R × *fin* AB × *cof* B : : *fin* BC : $\frac{\textit{fin}\ \text{AB} \times \textit{cof}\ \text{B} \times \text{R}}{\textit{fin}\ \text{C} \times \textit{fin}\ \text{AC}}$: : *fin* BC : *cot* B en mettant pour *fin* AB sa valeur $\frac{\textit{fin}\ \text{AC} \times \textit{fin}\ \text{C}}{\textit{fin}\ \text{B}}$, d'où l'on tire *d*BC : *d*C : : *fin* BC : *cot* B, & *invertendo* *d*C : *d*BC : : *cot* B : *fin* BC. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

280. Puisque *d*B : *d*BC : : *cot* C : *fin* BC, il sera aisé de substituer à ce dernier rapport les suivants : : R × *cof* C : *fin* AB × *fin* A : : R : *tang* C × *fin* BC : : RR : *tang* C × *fin* BC : : *cot* C × *fin* B : *fin* AC × *fin* A : : R : $\frac{\textit{fin}\ \text{BC} \times \textit{fin}\ \text{B} \times \text{R}}{\textit{cot}\ \text{AB} \times \textit{fin}\ \text{BC} - \textit{cof}\ \text{B} \times \textit{cof}\ \text{BC}}$: : *cot* AB × *fin* BC — *cof* B × *cof* BC : *fin* BC × *fin* B. Et divisant par *fin* BC × *fin* B : : $\frac{\textit{cot}\ \text{AB} \times \text{R}}{\textit{fin}\ \text{B}} - \frac{\textit{cot}\ \text{BC} \times \text{R}}{\textit{tang}\ \text{B}}$: R : : *cot* AB — $\frac{\textit{cof}\ \text{B} \times \textit{cot}\ \text{BC}}{\text{R}}$: *fin* B, on trouveroit des rapports absolument semblables pour la proportion *d*C : *d*BC : : *cot* B : *fin* BC, c'est pourquoi nous ne nous arrêterons pas à les détailler ici.

COROLLAIRE II.

281. Puisque l'on a *d*B : *d*BC : : *cot* C : *fin* BC & *d*BC : *d*C : : *fin* BC : *cot* B ; en multipliant ces deux proportions par ordre, on trouvera *d*B : *d*C : : *tang* B : *tang* C : : *fin* AC × *cof* C : *fin* AB × *cof* B : : *fin* B × *cof* C : *fin* C × *cof* B, en substituant les valeurs des sinus des côtés AC, AB.

COROLLAIRE III.

282. Si le triangle est rectiligne, le dernier Théorême donnera *d*BC : *d*C : : BC : *cot* B : : BC × *fin* B : *cof* B × R ; ou comme la perpendiculaire abaissée de l'angle C sur le côté AB est au cosinus de l'angle B. On trouveroit de même *d*BC : *d*B : : BC : *cot* C ; & enfin *d*B : *d*C : : *tang* B : *tang* C.

V. SECTION.

Des variations d'un Triangle ſphérique dans lequel on ſuppoſe deux angles conſtants.

THÉOREME X.

283. *SUPPOSANT les deux angles* B & C *conſtants au triangle ſphérique* BAC (fig. 28), *la variation du côté ſur lequel ces angles ſont adjacents, eſt à celle d'un quelconque des autres côtés, en raiſon compoſée de la directe des ſinus des angles oppoſés à ces côtés & de celle du rayon au coſinus du troiſieme côté;* c'eſt-à-dire, que l'on aura dBC : dAC : : *ſin* A × R : *ſin* B × *coſ* AB.

DÉMONSTRATION.

Dans le triangle DEF (*fig.* 11) dont toutes les parties ſont ſuppléments de celles du triangle BAC, les deux côtés DF & FE ſeront variables. D'où il ſuit que ce cas rentre dans celui du premier Théorême de la derniere ſection, on aura donc dF : dD : : R × *ſin* DE : *ſin* FE × *coſ* E ; & prenant les correſpondants au triangle BAC, on aura dBC : dAB : : R × *ſin* A : *ſin* C × *coſ* AC, on prouveroit de même que dBC : dAC : : R × *ſin* A : *ſin* B × *coſ* AB. *C. Q. F. D.*

THÉOREME XI.

284. *La variation du côté adjacent aux angles conſtants eſt à celle de l'angle oppoſé, comme la ſécante de complément d'un côté quelconque eſt au ſinus de l'angle conſtant ſur ce côté;* c'eſt-à-dire, que l'on aura . . . . . dBC : dA : : *coſec* AB : *ſin* B : : *coſec* AC : *ſin* C.

DÉMONSTRATION.

On ſait que la coſécante d'un arc eſt égale au quarré du rayon diviſé par le ſinus de cet arc. Ainſi tout ſe

réduit à prouver que dBC : dA : : RR : *sin* B × *sin* AB ; ce qui ſe prouvera par le moyen du triangle DEF, comme on vient de démontrer le dernier Théorême. *C. Q. F. D.*

Théoreme XII.

285. *La variation d'un côté quelconque oppoſé à l'un des angles conſtants, eſt à la meſure de la variation du troiſieme angle, comme la cotangente de l'autre côté eſt au ſinus de ce même angle variable;* c'eſt-à-dire, que l'on aura dAB : dA : : *cot* AC *sin* A ; ou que dAC : dA : : *cot* AB : *sin* A.

Démonstration.

Cette propoſition ſe déduira immédiatement du Théorême IX, en applicant ce Théorême au triangle DEF, & faiſant les changements convenables. *C. Q. F. D.*

Corollaire I.

286. Il ſuit du dernier Théorême que les variations des côtés AB, AC oppoſés aux angles conſtants ſont comme les tangentes de ces mêmes côtés.

Corollaire II.

287. Si l'on ſuppoſe le triangle rectiligne, le premier Théorême dans la ſuppoſition actuelle nous apprend que la différentielle du côté variable eſt à celle d'un côté quelconque, dans la raiſon du ſinus des angles oppoſés, ce que l'on ſait d'ailleurs par la Géométrie Elémentaire. Le ſecond Théorême ne nous donne rien à connoître, parce que dA devient zéro dans un triangle rectiligne, dans lequel on ſuppoſe deux angles conſtants. Le troiſieme ne nous en apprend pas davantage par la même raiſon. Enfin le dernier Corollaire nous apprend que les variations des côtés ſont comme les côtés eux-mêmes, ce qui eſt conforme à ce que nous démontrons dans la Géométrie Elémentaire.

OBSERVATION.

288. On auroit pu démontrer aiſément les Théorêmes qu'on vient de voir par les figures de nos projections, en cherchant les rapports évanouiſſants des différentes lignes qui y ſont tracées. De même on auroit encore pu les déduire des formules analytiques que l'Algebre nous a fait découvrir, en ſuppoſant quelques-unes des lettres a, b, c, d, f, g &c, variables ſuivant les conditions du Théorême à démontrer, & paſſant enſuite des différentielles des ſinus, tangentes, &c, à celles des arcs de cercle. Mais la méthode de M. COTES m'a paru la plus lumineuſe, & en même temps la plus facile; c'eſt pourquoi, je n'ai fait, pour ainſi dire, que traduire ſon excellent morceau: *De æſtimatione errorum in mixtâ Matheſi.* On me pardonnera d'avoir tâché de ſimplifier encore cette théorie, en l'appliquant aux triangles rectilignes par de ſimples Corollaires. Il ne nous reſte plus que de faire quelques applications de cette théorie à différents exemples.

PREMIER EXEMPLE.

289. *Soit une hauteur* AB *qu'il faut meſurer avec un inſtrument, au moyen duquel on obſerve l'angle* ACB. *On demande quelle erreur on peut commettre ſur cette hauteur, d'après celle qui peut avoir lieu dans la meſure de l'angle* (fig. 30).

SOLUTION.

Il eſt évident que dans le triangle BAC, le côté AC & l'angle droit reſtent conſtants. Donc on aura (n°. 258) $d\,AB : dC :: BC : \sin ABC :: 2AB : \sin 2ACB$. Car en ſubſtituant à $\sin 2ACB$ ſa valeur $\frac{2 \sin ACB \times \sin ABC}{R}$, cette proportion devient $BC : R :: AB : \sin ACB$; donc *la variation de la hauteur* AB *eſt à la meſure de la variation de l'angle* C, *comme le double de cette hauteur eſt au*

ſinus du double de l'angle obſervé. Donc l'erreur qui peut avoir lieu dans la détermination de cette hauteur, ſera la plus petite poſſible, lorſque le ſinus du double de l'angle obſervé ſera le plus grand poſſible. Ce qui a lieu, lorſque cet angle eſt de 45°. Ainſi dans le cas où il faudroit déterminer une hauteur comme AB, par l'obſervation d'un angle en C, il faudra faire enſorte que l'angle obſervé ſoit le plus près qu'il eſt poſſible de 45°. *C. Q. F. T.*

290. Voyons préſentement juſqu'où peut aller l'erreur du côté AB, en ſuppoſant que l'on ſe ſoit trompé d'une minute dans la détermination de l'angle. Si l'on donne au rayon 10000000 l'arc d'une minute qui meſure l'erreur ſuppoſée, ſera de 2909, dont le double eſt 5818. Or cette quantité eſt au ſinus du double de l'angle demi-droit ou au rayon : : 1 : 1719. Ainſi dans la ſuppoſition actuelle on peut ſe tromper ſur la hauteur AB de $\frac{1}{1719}$. Cette erreur augmentera ou diminuera dans la raiſon des erreurs qui auront eu lieu relativement à cet angle ſuppoſé de 45°. Si l'angle obſervé eſt plus grand ou plus petit que 45°, l'erreur augmentera dans la raiſon du rayon au ſinus de l'angle double.

SECOND EXEMPLE.

291. *On demande l'heure du jour ou de la nuit par la hauteur obſervée d'une étoile ou d'un aſtre quelconque; & l'on propoſe d'aſſigner l'erreur du temps d'après l'erreur connue dans la hauteur obſervée* (fig. 31).

SOLUTION.

Soit le triangle ſphérique PZS dans lequel P eſt le pole, Z le zénit de l'obſervateur, & S l'aſtre ou l'étoile obſervée; PS eſt le complément de la déclinaiſon de l'aſtre, PZ le complément de la latitude, ZS le complément de la hauteur. L'angle ZPS eſt l'angle horaire variable compris entre les côtés conſtants PZ, PS. L'on aura la variation de l'angle horaire

horaire SPZ à la variation du côté oppoſé SZ, comme la coſécante de l'angle PSZ eſt au ſinus de l'arc PZ (n°. 276), ou $dP : dZS :: R^2 : \mathit{fin}\,Z \times \mathit{fin}\,PZ$; mais la variation de l'angle en P eſt la meſure de l'erreur du temps : ainſi l'on peut prendre dP pour l'erreur même du temps, & l'on aura dP ou $dt = \frac{dZ\,S \times R^2}{\mathit{fin}\,Z \times \mathit{fin}\,PZ}$. C.Q.F.T.

COROLLAIRE.

292. Il ſuit de-là qu'en ſuppoſant la même erreur dans les obſervations & la latitude de l'obſervateur auſſi la même, l'erreur du temps ne changera pas quelle que ſoit la hauteur de l'aſtre dans ſon vertical, puiſque $\frac{R^2}{\mathit{fin}\,PZ}$ ſera toujours une quantité conſtante. De plus, on voit que dans la même ſuppoſition de la latitude conſtante, l'erreur du temps ſera la moindre poſſible, lorſque l'aſtre aura été obſervé dans le premier vertical. Enfin ſi l'on ſuppoſe deux latitudes différentes, l'erreur ſera la moindre poſſible, lorſque l'obſervateur ſera à l'équateur, & qu'il obſervera un aſtre placé dans le premier vertical.

Par exemple, en admettant ces deux conditions : Si l'on ſuppoſe de plus qu'on ſe ſoit trompé d'une minute dans l'obſervation de la hauteur; l'on trouvera, en faiſant le calcul, que l'erreur eſt de 4 ſecondes de temps. Si nous ſuppoſons à préſent que l'obſervateur s'éloigne de l'équateur, cette erreur ſera à la précédente dans la raiſon du ſinus total au ſinus de complément de la latitude, l'aſtre étant toujours obſervé dans le premier vertical. Ainſi pour une latitude de 45°, l'erreur ſera de $5'' \frac{1}{3}$; pour une latitude de 50°, l'erreur ſeroit de $6'' \frac{2}{9}$; & pour une de 55°, l'erreur ſera de $6'' \frac{17}{38}$. Enfin ſi l'aſtre a été obſervé dans un vertical quelconque incliné au méridien, l'erreur augmentera encore à l'égard de celles trouvées précédemment dans la raiſon du rayon au ſinus de cet angle; & ſes variations ſuivront en même temps les va-

riations de l'erreur primitive ſuppoſée dans l'obſervation.

TROISIEME EXEMPLE.

293. *Soient* LSK, & L′ S′ K′ *deux cercles almikantarats ou paralleles à l'horizon* (fig. 32). S, S′ *les points où ces cercles ſont rencontrés dans un même jour par un aſtre dont la déclinaiſon eſt ſuppoſée la même pendant tout ce jour : on demande quel doit être le rapport des angles* PSZ, PS′Z *de chaque cercle horaire* PS, PS′ *avec le vertical correſpondant, pour que le temps que l'aſtre employera à paſſer d'un almikantarat à l'autre, ſoit le plus court poſſible.*

SOLUTION.

L'énoncé du Problême fait voir que dans les triangles PZS, PZS′, les côtés PZ & ZS, ZS′ ſont conſtants, tandis que les côtés PS, PS′ varient. Soient donc nommés h & h' les angles horaires en P ; S & S′ les angles à l'aſtre en S & S′ de chaque cercle horaire PS, PS′ avec le vertical correſpondant ZS & ZS′ ; & ſoit D la déclinaiſon dont la variation ſera dD que nous ferons négative, parce que, ſuivant la figure, ſi cette déclinaiſon eſt boréale comme nous l'avons ſuppoſé ici, les arcs PS, PS′ diminuent à meſure que la déclinaiſon augmente. Cela poſé, on aura par le n°. 279, $dh = -\frac{\cot S \times dD}{\cos D}$; & pareillement $dh' = -\frac{\cot S' \times dD}{\cos D}$. Donc, puiſque le temps par l'arc SS′ doit être un *minimum*, la différence des variations des angles horaires doit être égale à zéro ; ce qui donnera $-\frac{\cot S' \times dD}{\cos D} + \frac{\cot S \times dD}{\cos D} = 0$; d'où l'on tire ſur le champ $\cot S' = \cot S$: ce qui m'apprend que ce jour-là les angles S′, S doivent être égaux. Si l'aſtre eſt le ſoleil, & ſi l'un des almikantarats ſe confond avec l'horizon, & que l'autre ſoit le cercle crépuſculaire que l'on ſuppoſe communément de 18° au-deſſous de l'ho-

rizon, le ſymptome qu'on vient de découvrir, m'apprend que ce jour-là les angles au ſoleil, ſoit à l'horizon, ſoit dans le cercle crépuſculaire, ſont égaux. Ce même ſymptome ſervira donc à trouver le jour du plus court crépuſcule, en cherchant d'abord quelle doit être la déclinaiſon qui répond à ce rapport déterminé pour les angles au ſoleil. C'eſt ce que nous allons faire dans le Problême ſuivant.

PROBLÊME.

294. *Suppoſant égaux les angles de chaque cercle horaire avec le vertical qui lui répond; on demande quelle doit être la déclinaiſon qui lui répond* (fig. 32).

SOLUTION.

Soient S & S′ les angles de chaque cercle horaire avec le vertical; & C, C′ les diſtances de chaque cercle parallele à l'horizon à ce même grand cercle. Soit de plus L la latitude du lieu, & D la déclinaiſon de l'aſtre; on aura pour le triangle PZS (n°. 225) $\frac{cof\,D \times cof\,S}{R} = \frac{R \times fin\,L - fin\,C \times fin\,D}{cof\,C}$, & pour le triangle PZS $\frac{cof\,D \times cof\,S'}{R} = \frac{R \times fin\,L + fin\,C' \times fin\,D}{cof\,C'}$. Nous avons mis le ſigne + dans la ſeconde formule, à cauſe que ZS′ eſt obtus, ainſi que l'angle oppoſé. Donc, puiſque les premiers membres de ces équations ſont égaux, les ſeconds le ſeront auſſi, & donneront cette nouvelle équation $R \times fin\,L \times cof\,C' - fin\,C \times fin\,D \times cof\,C' = R \times fin\,L \times cof\,C + fin\,C' \times fin\,D \times cof\,C$, d'où l'on tire tout de ſuite cette proportion :

$fin\,C' \times cof\,C + fin\,C \times cof\,C' : R \times (cof\,C' - cof\,C) :: fin\,L : fin\,D$,

ou n°. 86. $fin\,(C' + C) : cof\,C' - cof\,C :: fin\,L : fin\,D$,

ou bien encore (par les n°s. 73 & 95) $cof\frac{(C + C')}{2} : fin\frac{(C - C')}{2} :: fin\,L : fin\,D$.

Si donc on suppose, comme cela a lieu dans le cas du plus court crépuscule que C soit zéro, on aura cette derniere proportion $R : -tang \frac{C'}{2} :: sin\ L : sin\ D$; c'est-à-dire, *le rayon est à la tangente de la moitié de l'abaissement du cercle crépusculaire au-dessous de l'horizon; comme le sinus de la latitude est au sinus de la déclinaison du soleil.* Comme cette déclinaison est négative à cause que $tang \frac{C'}{2}$ est précédée du signe —, on voit que la déclinaison du soleil doit être de dénomination contraire à la latitude. *C. Q. F. T. & D.*

ANCIENNE SOLUTION.

295. Soit u le *cosinus* de l'angle horaire à l'instant où finit le crépuscule. L'angle sera représenté par cette intégrale $\int -\frac{r\,du}{\sqrt{r^2-u^2}}$. Soit pareillement z le *cosinus* de l'arc semidiurne, cet arc sera $\int -\frac{r\,dz}{\sqrt{r^2-z^2}}$. Donc il faut supposer $\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} - \frac{dz}{\sqrt{r^2-z^2}} = 0$. Nommons c le *sinus* de la latitude & g son cosinus; h le *sinus* de l'abaissement du cercle crépusculaire au-dessous de l'horizon, & y le sinus de la déclinaison; on aura . . . $u = \frac{hr^2 - cry}{g\sqrt{r^2-y^2}}$, & $z = \frac{cry}{g\sqrt{r^2-y^2}}$. Au moyen de ces valeurs, chassons u & z dans la premiere équation, & divisons la transformée par dy; nous aurons $hy^4 + 2cry^3 - g^2hy^2 - 2cr^3y - c^2hr^2 = 0$. D'où l'on tire $y = r$ & $y = -r$; & encore $y = -\frac{cr - \sqrt{r^2-h^2}}{h}$ & $y = -\frac{cr + c\sqrt{r^2-h^2}}{h}$ qui sont les quatre valeurs de l'inconnue y dans cette équation.

Les deux premieres valeurs indiquant le soleil au pole

où il ne peut physiquement arriver, sont étrangeres à la question, & ne nous donnent rien à connoître. Des deux autres, la plus grande donne le *minimum* de la somme de l'arc sémidiurne, & de l'arc parcouru depuis midi jusqu'à la fin du crépuscule; & la plus petite donne le *minimum* de la différence des mêmes arcs que nous cherchons. Ainsi la déclinaison demandée a pour sinus . . . . . $y = -\frac{cr + c\sqrt{r^2 - h^2}}{h}$. Donc si l'on nomme t la tangente de la moitié de l'abaissement du cercle crépusculaire au-dessous de l'horizon, on aura $y = -\frac{ct}{r}$; ou $r : t :: c : -y$. Ce qui nous apprend, comme nous l'avons déja vu par notre premiere Solution, que la déclinaison du soleil est de dénomination contraire à la latitude de l'observateur.

OBSERVATION.

296. Il suit de notre premiere Solution que si deux triangles sphériques ont deux côtés égaux chacun à chacun avec un angle aussi égal opposé à l'un de ces côtés égaux, on aura cette analogie: *Le cosinus du côté opposé à l'angle égal, est au cosinus de l'autre côté adjacent au même angle égal; comme le cosinus de la demi-somme des autres côtés, est au cosinus de la demi-différence des mêmes côtés.* C'est ce qui se déduit immédiatement de ce que l'on a $cos\left(\frac{C+C'}{2}\right) : sin\left(\frac{C-C'}{2}\right) :: sin\ L : sin\ D$, en faisant attention que les dénominations particulieres au problême peuvent être généralisées, en ne conservant que ce qui est essentiel aux triangles que l'on est obligé de considérer.

Si l'on demandoit pareillement quelle doit être la déclinaison d'un astre, pour que dans l'intervalle de deux angles horaires donnés, le changement en hauteur fût le moindre possible. On trouveroit par le même procédé

& avec les dénominations précédentes que $cof\left(\frac{h'-h}{2}\right)$ $cof\left(\frac{h'+h}{2}\right)$: : *tang* L : *tang* D.

QUATRIEME EXEMPLE.

PROBLEME.

297. *Trouver en tout temps la correction qu'il faut faire au midi conclu par les hauteurs correſpondantes d'un aſtre dont la déclinaiſon ſubit une petite variation, pendant l'intervalle des deux hauteurs égales* (fig. 32).

SOLUTION.

Les Aſtronomes, pour s'aſſûrer de l'inſtant du midi, obſervent la hauteur du centre du ſoleil quelques heures avant midi; & quelques heures après, ils obſervent l'inſtant auquel cet aſtre eſt à la même hauteur ſur l'horizon: le milieu de l'intervalle de temps compris entre ces deux obſervations & compté ſur la pendule, marque l'inſtant du paſſage du ſoleil par le méridien. Cette méthode ſeroit exacte & rigoureuſe ſi la déclinaiſon du ſoleil n'éprouvoit aucune variation dans l'intervalle des obſervations; ce qui n'a jamais lieu rigoureuſement. Le temps des ſolſtices eſt celui où cette erreur eſt la moindre poſſible, parce que pour lors le ſoleil ne change pas ſenſiblement de déclinaiſon pendant deux ou trois jours. Dans tous les autres moments de l'année, cette opération a beſoin d'une correction qu'il s'agit de déterminer par ce problême. Car il eſt viſible que lorſque le ſoleil eſt dans les ſignes aſcendants, il arrive plus tard à la même hauteur; & dans les ſignes deſcendants, il arrive plutôt à la même hauteur: il faut donc dans les ſix premiers mois retrancher quelque choſe, & ajouter quelque choſe dans les ſix autres mois pour avoir l'inſtant précis du midi.

Pour trouver cette correction; ſoit P*s* un cercle horaire très-voiſin de l'arc PS, & terminé à ce même almi-

kantarat LSK (*fig.* 32), il eſt viſible que la meſure de l'angle SP*s* réduite en temps exprime de combien le ſoleil eſt arrivé plus tard ou plutôt l'après-midi à la même hauteur que le matin. Donc la moitié de cet arc ſera ce qu'il faudra ôter ou ajouter à l'inſtant du midi conclu par la hauteur correſpondante. Cela ſuppoſé, ſi le changement en déclinaiſon eſt aſſez petit, pour qu'on puiſſe le confondre ſenſiblement avec la variation naiſſante ou la différentielle de l'arc PS; il eſt viſible qu'au triangle PZS, les arcs PZ & ZS demeureront conſtants, tandis que le côté PS eſt variable. Or nous avons trouvé (art. 280) que $d\mathrm{B} : d\mathrm{BC} :: \frac{cot\ \mathrm{AB}}{ſin\ \mathrm{B}} \pm \frac{cot\ \mathrm{BC}}{tang\ \mathrm{B}} : \mathrm{R} :$ en mettant B, A, C aux points P, Z, S, ce qui donne $d\mathrm{P} = \frac{tang\ \mathrm{PS}}{\mathrm{R}} \times \left(\frac{tang.\ latitude}{ſin\ \mathrm{P}} \pm \frac{tang.\ déclinaiſon}{tang\ \mathrm{P}}\right)$. Cette formule eſt préciſément celle que donne M. DE MAUPERTUIS, p. 34 de ſon Aſtronomie Nautique. Le ſigne + a lieu, lorſque la déclinaiſon eſt auſtrale; il eſt négatif, lorſque la déclinaiſon eſt boréale, comme il eſt aiſé de s'en aſſûrer par le détail de nos Solutions géométriques. La moitié de cet arc réduit en temps ſera la correction demandée. *C. Q. F. T.*

Ceux qui ſeroient curieux de voir un plus grand nombre d'applications de ces analogies différentielles, peuvent avoir recours aux Mémoires de l'Académie année 1744. On en trouvera auſſi un grand nombre dans l'Aſtronomie de M. DE LA LANDE. Nous obſerverons ſeulement que ſouvent pluſieurs de ces ſolutions ne ſont pas dans une rigueur vraiment Géométrique; mais elles approchent d'autant plus de la préciſion que les arcs que l'on conſidere, peuvent plus aiſément être pris pour des arcs naiſſants. Nous terminerons ce Chapitre par la ſolution d'un problême plus curieux qu'utile, mais qui néantmoins nous apprend encore des vérités intéreſſantes par la ſimplicité de la ſolution à laquelle on arrive. Il

s'agit dans ce Problême de trouver la ſurface d'un triangle ſphérique quelconque. Pluſieurs Géometres & M. JACQUES BERNOULLI entr'autres, ont cherché la quadrature de cette portion de la ſurface de la ſphere; ils ont eu pour l'élément de cette ſurface une différentielle dont l'intégrale dépend de la quadrature de l'hyperbole. La ſolution que je donne ici, & que j'ai tiré de M. WALLIS, eſt certainement la plus élégante que l'on puiſſe découvrir, & pourroit indiquer des moyens de ramener à la quadrature du cercle des intégrales de différentielles aſſez compliquées.

PROBLEME.

298. *Trouver la ſurface d'un triangle ſphérique quelconque* BAC (fig. 33).

SOLUTION.

Soient d'abord prolongés les côtés AB & BC d'un angle quelconque B, de maniere que BA*b*, BC*b*; AB*a*, CB*c* ſoient chacun des arcs de 180°: il eſt viſible que le triangle A*b*C ſera égal en tout au triangle *a*B*c*. Soit conçu un plan qui paſſe par les points A, C; *a*, *c*, & par conſéquent par le centre de la ſphere; ce qui donnera la ſurface ACB*a*c égale à celle d'une demi-ſphere, que nous déſignerons par *s*, en faiſant le rayon de ſon grand cercle $= r$, & la circonférence $= c$. Enfin ſoient encore déſignés par les lettres M, N, O, P, *n* les triangles ABC, CB*a*, *a*B*c*, *c*BA, A*b*C. Cela poſé, la portion ou le fuſeau ſphérique *b*ABC*b*, ſe déterminera par cette analogie $c : B :: s : \frac{Bs}{c} = M + n$, ou $M + N$; de même le fuſeau AC*a*BA ſe déterminera par cette autre $c : A :: s : \frac{As}{c} = M + O$; & le fuſeau CB*c*AC ſe trouvera en faiſant $c : C :: s : \frac{Cs}{c} = M + P$.

Donc en raſſemblant toutes ces égalités, on aura

$\overline{B+A+C} \times \frac{s}{c} = 3M+N+O+P$; & à cauſe que $M+N+O+P = \frac{1}{2}s$, on trouvera M ou l'aire du triangle $BAC = \frac{B+A+C}{2c} \times s - \frac{1}{2}s$; & parce que la ſurface de la demi-ſphere $= cr$, on aura enfin l'aire du triangle ſphérique $BAC = \left(\frac{B+A+C}{2}\right) \times r - \frac{1}{2}cr$ ou $\left(\frac{B+A+C-c}{2}\right) \times r$; c'eſt-à-dire, qu'il faudra ajouter les trois angles du triangle ſphérique, en ôter la circonférence ou ôter cette même ſomme de 360°, lorſqu'elle ſurpaſſera quatre angles droits, & multiplier la demi-différence par le rayon.

CHAPITRE SIXIEME.

Application des Regles démontrées dans les Chapitres précédents à quelques Problêmes d'Aſtronomie ſphérique.

QUOIQU'AVEC les Tables que nous avons ajoutées à la fin du ſecond Chapitre, on ſoit en état de réſoudre tous les problêmes qui ſe réduiront à quelques-uns des cas des triangles ſphériques rectangles ou obliquangles; néanmoins comme ceux qui n'auroient pas un certain uſage des calculs trigonométriques, pourroient craindre de ſe tromper dans l'application de ces regles aux nombres, j'ai cru ne pouvoir me diſpenſer d'ajouter ici un certain nombre d'exemples, afin de rendre ce petit Traité le plus complet qu'il ſeroit poſſible. J'aurois pu, comme tous les Auteurs Trigonométriques, faire ces ap-

plications ſur des triangles quelconques, dont les parties n'auroient eu aucune dénomination particuliere ; mais j'ai mieux aimé ſuppoſer tous ces triangles relatifs aux cercles de la ſphere, afin de rendre ces ſolutions plus intéreſſantes pour les Commençants.

Nous ſuppoſerons donc toujours dans la ſuite les principaux cercles de la ſphere déſignés, comme ils ſe trouvent marqués dans la figure 34. HOR eſt l'horizon ; l'équateur AOQ ; l'écliptique IEL. Faiſant avec l'équateur un angle qui diminue très-lentement, & que nous ſuppoſerons avec tous les Aſtronomes pour le temps préſent de 23° 28′ 30″. PZH eſt le méridien dans lequel les points P, *p* repréſentent les poles ; ſavoir, P celui qui eſt élevé ſur l'horiſon, & *p* celui qui eſt abaiſſé au-deſſous. Nous ſuppoſerons la hauteur du pole de 48° 51′, telle qu'elle eſt pour la ville de Paris. Enfin nous déſignerons un aſtre quelconque par S. Nous ſuppoſons qu'on ſait ce que c'eſt que la déclinaiſon d'un aſtre, ſon aſcenſion droite, ſa longitude & ſa latitude, ainſi que les principaux cercles de la ſphere, dont on trouve des notions ſuffiſantes dans tous les éléments de la ſphere.

PROBLEME I.

299. *Connoiſſant le lieu du ſoleil dans l'écliptique, trouver ſa déclinaiſon ou ſa diſtance* SD *à l'équateur* (fig. 34).

SOLUTION.

Soit S le lieu du ſoleil 18° 24′ du taureau ; donc l'arc ES ſera de 48° 24′ ; ainſi dans le triangle SDE rectangle en D, on connoît l'hypoténuſe ES, & l'angle DES de 23° 28′ 30″ égal à l'obliquité de l'écliptique. On aura donc par la table des triangles rectangles . . . . .

$$\text{ſin DS} = \frac{\text{ſin ES} \times \text{ſin DES}}{R}.$$

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

Log. ſin. 48° 24′ = 9,873784.
Log. ſin. 23° 28′ 30″ = 9,600263.

9,474047. = *log. ſin.* 17° 19′ 49″.

PROBLEME II.

300. *Connoiſſant la déclinaiſon du ſoleil, & de plus dans quelle ſaiſon de l'année on ſe trouve déterminer le lieu du même aſtre dans l'écliptique* (fig. 34).

SOLUTION.

Suppoſons que la déclinaiſon du ſoleil eſt boréale de 17° 19′ 49″, & que l'on eſt dans le printemps; il faut trouver l'arc ES de l'écliptique compris entre le ſoleil & le premier degré d'Ariès. Il eſt viſible que dans le triangle rectangle DES, on connoît l'angle E avec le côté DS qui lui eſt oppoſé. On aura donc l'hypoténuſe ES par l'analogie commune qui donne . . . . . $\sin ES = \frac{\sin DS \times R}{\sin DES}$.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

9,474047 = *log. ſin.* DS = 17° 19′ 49″.
0,399737 = *comp. Arit. ſin* 23° 28′ 30″.

9.873784 = *log. ſin.* ES = 48° 24′ 0″.

SCHOLIE.

301. On voit par ces deux problêmes comment on a pu par l'obſervation dreſſer des tables du mouvement du ſoleil dans l'écliptique & de ſes variations; car après avoir bien établi la latitude du lieu de l'obſervateur & fixé un quart de cercle dans le plan du méridien, l'obſervation de la hauteur méridienne du ſoleil donne ſa déclinaiſon ou ſa diſtance à l'équateur, de laquelle il a été facile de conclure chaque jour ſa longitude, comme on vient de faire.

PROBLEME III.

302. *Connoiſſant le lieu du ſoleil dans l'écliptique ; trouver ſon aſcenſion droite ; ou, ce qui revient au même, le point* D *de l'équateur qui paſſe au méridien en même temps que le ſoleil* (fig. 34).

SOLUTION.

Suppoſant toujours l'arc ES de 48° 24′ 0″, il s'agit de trouver l'arc ED. La Table des triangles rectangles donne pour ce cas $tang\ ED = \frac{tang\ ES \times cof\ DES}{R}$.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

10,051665 = *log. tang.* 48° 24′ 0″.
9,962480 = *log. coſin.* 23° 28′ 30″.
10,014145 = *log. tang.* 45° 55′ 58″.

PROBLEME IV.

303. *Connoiſſant la latitude d'un lieu & la déclinaiſon du ſoleil ; trouver ſon amplitude orientale ou occidentale, c'eſt-à-dire, à quelle diſtance de l'orient ou de l'occident vrai ſe leve ou ſe couche le ſoleil* (fig. 34).

SOLUTION.

Suppoſant toujours la latitude de 48° 51′ 0″, & que la déclinaiſon du ſoleil eſt boréale de 18° 30′ ; il eſt viſible que le problême ſe réduit à trouver l'hypoténuſe d'un triangle rectangle DOS, dans lequel on connoît l'angle DOS complément de la latitude avec le côté DS égal à la déclinaiſon du ſoleil. On aura donc par l'analogie commune $ſin\ OS = \frac{ſin\ DS \times R}{ſin\ DOS}$.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

9,501476 = *log. ſin.* OS = 18° 30′ 0″.
0,181753 = *com. A. log. ſin.* 41° 9′ 0″.
9,683229 = *log. ſin.* OS = 28° 49′ 45″.

COROLLAIRE I.

304. Il ſuit de ce qui précede que ſi l'on connoît la déclinaiſon du ſoleil & ſon amplitude, on connoîtra aiſément la latitude du lieu ; car ſuivant ces ſuppoſitions au triangle rectangle DOS, on connoîtra, outre l'angle droit, le côté DS & l'hypoténuſe ; on aura donc $\textit{ſin}\ DOS = \frac{\textit{ſin}\ DS \times R}{\textit{ſin}\ OS}$, & par logarithmes ;

$9{,}501476 = \textit{log. ſin.}\ 18^\circ\ 30'\ 0''.$
$0{,}316771 = \textit{comp. arit. log. ſin.}\ 28^\circ\ 49'\ 45''.$
$9{,}818247 = \textit{log. ſin.}\ 41^\circ\ 9'\ 0''$, donc la latitude eſt de $48^\circ\ 51'\ 0''$.

COROLLAIRE II.

305. De même connoiſſant l'amplitude OS & la latitude d'un lieu, on trouvera la déclinaiſon du ſoleil qui convient à cette amplitude ; on aura donc . . . . . $\textit{ſin}\ DS = \frac{\textit{ſin}\ OS \times \textit{ſin}\ DOS}{R}$, & par Logarithmes

$9{,}683229 = \textit{log. ſin.}\ 28^\circ\ 49'\ 45''.$
$9{,}818247 = \textit{log. ſin.}\ 41^\circ\ 9'\ 0''.$
$9{,}501476 = \textit{log. ſin.}\ 18^\circ\ 30'\ 0''.$

PROBLEME V.

306. *Connoiſſant la latitude d'un lieu, & le degré du ſoleil dans l'écliptique ; trouver le point de l'équateur qui eſt à l'horiſon, en même temps que le ſoleil ; ou, ce qui revient au même l'aſcenſion oblique qui convient à cette latitude & au lieu du ſoleil.*

SOLUTION.

Suppoſons, comme dans le premier Problême, que le lieu du ſoleil dans l'écliptique eſt $18^\circ\ 24'$ du taureau. Nous avons déja trouvé ſa déclinaiſon de $17^\circ\ 19'\ 49''$ (n°. 299). Donc au triangle rectangle DOS, l'on connoît le côté DS & l'angle DOS complément de la latitude ; le côté OD eſt celui qu'il faut trouver. La Ta-

ble générale des triangles rectangles donne . . . . . $\sin OD = \frac{tang\,DS \times R}{tang\,DOS}$.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

$9{,}494217 = log.\ tang. \ldots 17^\circ\ 19'\ 49''.$
$0{,}058541 = comp.\ arit.\ tang. 41^\circ\ 9'\ 0''.$
$9{,}552758 = log.\ sin.\ OD = 20^\circ\ 55'\ 15''.$

Si de l'ascension droite DE que nous avons trouvée (n°. 302) . . . . . de $45^\circ\ 55'\ 58''$
on ôte l'arc que nous venons de trouver. $20^\circ\ 55'\ 15''$
on aura pour l'ascension oblique EO . . $25^\circ\ 0'\ 43''$.

SCHOLIE.

307. On sait qu'à l'équateur les jours sont continuellement égaux aux nuits, parce que dans la sphere droite le point D se confond avec le point O. Dans la sphere oblique l'arc DO exprime ce qu'il faut ajouter ou ôter à 90° pour avoir la durée de la moitié du jour, selon que le soleil est dans les signes septentrionaux ou méridionaux pour une latitude boréale. On voit aisément que je n'ai point égard ici à l'augmentation causée par la réfraction.

PROBLEME VI.

308. *Connoissant la latitude, & le lieu du soleil dans l'écliptique ; trouver l'angle de l'écliptique avec l'horizon à l'instant du lever de cet astre.*

SOLUTION.

Supposant toujours que le lieu du soleil est 18° 24′ du taureau ; que la latitude est de 48° 51′ ; son complément AOH ou DOS sera de 41° 9′ 0″. Nous avons déja trouvé au (n°. 299) l'arc DS de 17° 19′ 49″. Avec cet arc on calculera, comme au Problême IV, l'amplitude orientale OS dont on trouvera le logarithme de sinus = 9,655800. De plus nous venons de trouver

pour les mêmes données au dernier problême EO = 25° 0′ 43″. Donc par l'analogie commune entre les ſinus des côtés & ceux des angles oppoſés, on trouvera $\sin \text{ESO} = \frac{\sin \text{SEO} \times \sin \text{EO}}{\sin \text{OS}}$.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

9,600263 = *log. ſin.* . . 23° 28′ 30″.
9,626141 = *log. ſin.* . . 25° 0′ 43″.
0,344200 = *Comp. A. log. ſin.* OS.
9,570604 = *log. ſin.* ESO = 21° 50′ 32″.

SCHOLIE.

309. Par des calculs à peu près ſemblables à ceux des problêmes précédents, il ſeroit aiſé de trouver l'arc IE de l'écliptique compris entre le méridien & l'interſection du même écliptique avec l'équateur. Car ayant l'aſcenſion oblique EO, on a l'arc AE de l'équateur qui en eſt le complément; donc au triangle rectangle IAE, on connoît le côté AE avec l'angle en E égal à l'obliquité de l'écliptique. On connoîtroit de même l'arc du méridien compris entre l'équateur & l'écliptique; ainſi que l'angle de l'écliptique avec le méridien & l'arc IS compris entre le méridien & l'équateur.

J'ajouterai encore ici un problême dont la ſolution ne dépend que d'un triangle rectangle ordinaire, quoique M. DE MAUPERTUIS y ait employé le calcul différentiel.

PROBLEME VII.

310. *Connoiſſant la déclinaiſon d'un aſtre avec la latitude de l'obſervateur; trouver* 1°, *le moment auquel il paroît monter verticalement ſur l'horizon;* 2°, *la hauteur de l'aſtre dans le vertical;* 3°, *l'angle de ce même vertical avec le méridien* (fig. 34).

SOLUTION.

Pour peu qu'on faſſe attention à la nature du problê-

me, on voit que l'aſtre, en décrivant ſon parallele, ne peut s'élever perpendiculairement à l'horizon, qu'autant que ſon parallele pourra être touché par un vertical; & que l'aſtre ſe trouvera dans le point de contact de ſon parallele avec ce même vertical; ce qui aura lieu deux fois dans une révolution de 24 heures. De plus, il eſt aiſé de reconnoître qu'un parallele quelconque ne peut être touché par un cercle vertical, qu'autant que la diſtance de ce parallele à l'équateur ſera plus grande que la latitude de l'obſervateur. Car dans le cas où elle ſeroit moindre & de même dénomination que la latitude, il eſt clair que ce parallele ſera toujours coupé par quelque cercle vertical que ce puiſſe être. Cela poſé, ſoit Z S T, un vertical quelconque qui touche le parallele GSM au point S où ſe trouve l'aſtre dont la déclinaiſon a pour complément l'arc P S. Il eſt viſible à cauſe du point de contact du vertical & du parallele, que l'arc P S eſt le plus petit qu'on puiſſe mener du point P au vertical ZST. Donc l'angle PSZ ſera droit, & dans ce triangle rectangle PSZ on connoît outre l'angle droit le côté PS égal au complément de la déclinaiſon de l'étoile, & le côté PZ égal au complément de la latitude de l'obſervateur. Donc ſi on connoît la différence d'aſcenſion droite de l'étoile & du ſoleil, l'angle horaire ZPS donnera l'inſtant où cet aſtre paroîtra s'élever perpendiculairement à l'horizon : le côté Z S donnera le complément de la hauteur de l'aſtre ſur l'horizon, & l'angle PZS donnera la poſition du vertical demandé à l'égard du méridien. Soit donc L la latitude; D, la déclinaiſon de l'aſtre; H, l'angle horaire ZPS; V, l'angle du vertical avec le méridien; & H′, la hauteur de l'aſtre ſur l'horizon lorſqu'il paroît monter verticalement, les formules des triangles rectangles donneront $cof\,H = \frac{cotang\,D \times R}{cotang\,L}$, $ſin\,H' = \frac{cof\,L \times R}{cof\,D}$ & $ſin\,V = \frac{cof\,D \times R}{cof\,L}$. Les applications en nombres n'auront aucune difficulté.

PROBLEME

PROBLEME VIII.

311. *Connoiſſant la latitude & la déclinaiſon du ſoleil; trouver l'heure de ſon lever & de ſon coucher* (fig. 34).

SOLUTION.

Suppoſant la déclinaiſon boréale de 18° 30′, & la latitude de 48° 51′ 0″; il eſt viſible qu'au triangle rectangle PSR, l'on connoît PR égal à la latitude & PS complément de la déclinaiſon; l'angle RPS eſt celui qu'il faut trouver, on aura donc $cof\,RPS = \frac{tang\,PR \times R}{tang\,PS}$.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

$$10{,}058541 = log.\ tang.\ 48°\ 51'\ 0''$$
$$9{,}524520 = com.\ A\ log.\ tang.\ 71°\ 30'\ 0''$$
$$9{,}583061 = cof\,RPS = 67°\ 29'\ 17''.$$

Pour ſavoir à quelle heure du matin répond cette valeur de l'angle RPS, on ſe ſervira de la Table ſuivante, laquelle nous fait connoître que le jour où la déclinaiſon étoit boréale de 18° 30′ pour un lieu dont la latitude eſt de 48° 51′, le ſoleil ſe leve à 4 heures 29 minutes 57 ſecondes.

pour 15°	. . .	1 *heure.*
1°	. . .	4 *minutes.*
15′	. . .	1 *minute.*
1′	. . .	4 *ſecondes.*
15″	. . .	1 *ſeconde.*
1″	. . .	4 *tierces.*
15‴	. . .	1 *tierce.*

SCHOLIE.

312. Si l'on connoiſſoit déja l'amplitude, il faudroit faire cette proportion pour avoir l'angle RPS : *Le cofinus de la déclinaiſon eſt au ſinus total, comme le cofinus de l'amplitude eſt au ſinus de l'angle horaire* RPS. Et réciproquement, connoiſſant l'heure du lever ou du coucher du ſoleil, on connoîtroit l'amplitude orientale ou occidentale par cette analogie : *Le ſinus total eſt au cofinus de la déclinaiſon, comme le ſinus de l'angle horaire eſt au cofinus de l'amplitude.*

On voit de même, que ſi l'on connoît la déclinaiſon du ſoleil & l'heure de ſon lever, on trouvera aiſément la latitude du lieu; puiſque dans le triangle rectangle SRP, on connoît l'hypoténuſe avec l'angle P. On trouveroit auſſi la déclinaiſon du ſoleil par l'heure de ſon lever & par la latitude. Enfin on peut appliquer cette ſolution au lever & au coucher des planetes & des étoiles, pourvu que l'on connoiſſe leur déclinaiſon & leur aſcenſion droite. Car ſi l'on cherche pour le même jour l'aſcenſion droite du ſoleil par ſa déclinaiſon, en prenant la différence de celle de l'étoile & du ſoleil, & la réduiſant en heures, minutes & ſecondes par la table précédente, on aura le temps dont cet aſtre ſuit ou précede le lever du ſoleil; ce qui fera connoître dans quel temps de l'année une étoile peut être viſible ou inviſible ſuivant ſa diſtance au ſoleil.

On peut auſſi faire uſage de ce problême pour connoître la réfraction horizontale d'un aſtre. Car ſachant, par exemple, l'heure vraie du lever du ſoleil, & connoiſſant le temps apparent, il n'y a qu'à prendre la différence que l'on réduira en partie de l'équateur. Enſuite on calculera le côté ZS relatif à ce nouvel angle, duquel ôtant 90°, le reſte ſera ce dont l'aſtre a paru plus élevé par la réfraction.

PROBLEME IX.

313. *Connoiſſant la latitude, la déclinaiſon & la hauteur du ſoleil ſur l'horizon; trouver l'heure qu'il eſt* (fig. 35).

SOLUTION.

Soit la déclinaiſon boréale de 18° 30′; la latitude de 48° 51′, & la hauteur du ſoleil de 52° 35′. On connoît donc les trois côtés du triangle PZS, & c'eſt l'angle ZPS qu'il faut trouver; ce qui ſe fera aiſément par la formule $\mathit{ſin}\ \frac{1}{2}\ P = \frac{\sqrt{\mathit{ſin}\ (\frac{1}{2}s-b) \times \mathit{ſin}\ (\frac{1}{2}s-c)}}{\sqrt{\mathit{ſin}\ b \times \mathit{ſin}\ c}}$ dans la-

quelle s eſt la ſomme des trois côtés ; b & c ſont les côtés adjacents à l'angle demandé. L'opération ſe pratique en nombre comme on le voit ici.

37°	25′	0″	75°	2′	0″	
71°	30′	0″	41°	9	0″	
41°	9′	0″	33	53′	0″	$= \frac{1}{2}s - b$
150°	4′	0″ $= s$	75°	2′	0″	
75°	2′	0′ $= \frac{1}{2}s$	71	30	0″	
			3°	32′	0″	$= \frac{1}{2}s - c$

9,746248 = *log. ſin.* . . . . 33° 53′
8,789787 = *log. ſin.* . . . . 3° 32′
●,023043 = *comp. ar. log. ſin.* 71° 30′
0,181753 = *comp. ar. log. ſin.* 41° 9′

18,740831
9,370415 = *log. ſin.* $\frac{1}{2}P.$ = 13° 34′ 14″.

Donc l'angle ZPS = 27° 8′ 28″, & l'heure qui répond à cet angle, eſt 10 heures 11 minutes 26 ſecondes 8 tierces du matin, ſi l'angle ZPS eſt à l'orient du méridien ; ou 1 heure 48 minutes 33 ſecondes 52 tierces, ſi le même angle eſt à l'occident du méridien.

COROLLAIRE.

314. Ce Problême donne un moyen facile de connoître la durée du crépuſcule. Pour cela il n'y a qu'à concevoir le ſoleil abaiſſé de 18° au-deſſous de l'horizon. (C'eſt l'abaiſſement que l'on ſuppoſe communément au cercle crépuſculaire). L'arc ZS ſera de 108° ; on calculera, comme dans le préſent Problême, l'angle horaire ZPS ; on le ſouſtraira de 180°, & le reſte réduit en parties de temps donnera le commencement du crépuſcule ou le point du jour. Si c'eſt la fin du crépuſcule que l'on demande, ce ſera l'angle ZPS lui-même qu'il faudra réduire en parties de temps.

OBSERVATION.

Dans la pratique de ce Problême, il faut avoir ſoin de

corriger la hauteur de l'aſtre par la réfraction, & par la parallaxe s'il en a une ſenſible : on trouve des Tables de ces corrections dans la plupart des Traités d'Aſtronomie.

PROBLEME X.

315. *Connoiſſant la latitude, la déclinaiſon du ſoleil & ſa hauteur ſur l'horizon ; trouver l'angle que le vertical dans lequel ſe trouve le ſoleil fait avec le méridien* (fig. 35).

SOLUTION.

Il eſt viſible par les données du problême que dans le triangle PZS, on connoît les trois côtés ; & c'eſt l'angle PZS qu'il faut découvrir, ce qui ſe fera comme au problême précédent. Suppoſant donc les mêmes données qu'au problême précédent.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

$33^\circ\ 53' = \frac{1}{2}s - b$	9,746248	$= log.\ ſin.\ \frac{1}{2}s - b$
$37^\circ\ 37' = \frac{1}{2}s - c$	9,785597	$= log.\ ſin.\ \frac{1}{2}s - c$
	0,181753	$= comp.\ ar.\ log.ſin.\ 41^\circ\ 9'$
	0,216377	$= comp.\ ar.\ log.ſin.\ 35^\circ\ 25'$
	19,929975	
	9,964987	$= log.ſin.\ \frac{1}{2}$ PZS $= 134^\circ\ 36'\ 6''$

& partant l'angle HZK du vertical du ſoleil avec le méridien de $45^\circ\ 23'\ 54''$.

SCHOLIE.

316. Par cette opérarion, il eſt aiſé de connoître les quatre points cardinaux. Car faiſant avec une ligne qui repréſente le vertical du ſoleil un angle égal à l'angle trouvé, l'on aura la méridienne. Cette méthode, pourvu qu'on ait ſoin de corriger la hauteur du ſoleil par la réfraction, eſt d'autant plus commode dans la détermination de la méridienne qu'elle n'eſt point ſujette aux changements en déclinaiſon qui ont lieu pour les hauteurs correſpondantes : elle ſert auſſi à déterminer la variation de la bouſſole.

PROBLEME XI.

317. *Connoiſſant la latitude, la déclinaiſon & l'heure à laquelle le ſoleil s'eſt trouvé dans un vertical dont on ignore la poſition; trouver l'angle que fait ce même vertical avec le méridien* (fig. 35).

SOLUTION.

Par l'énoncé du problême, il eſt viſible que dans le triangle ſphérique PZS, l'on connoît les deux côtés PZ & PS avec l'angle ZPS qu'ils comprennent. Suppoſons donc la déclinaiſon de 18° 30′, & qu'on ait obſervé le ſoleil dans le vertical dont on demande la poſition à 10 heures 11 minutes 26 ſecondes. On trouvera par la Table donnée au problême VIII que l'angle horaire qui répond à cette heure, eſt de 27° 8′ 30″. L'arc PS ſera toujours de 71° 30′, & PZ de 41° 9′. Cela poſé, pour avoir l'angle PZS, on abaiſſera l'arc SR perpendiculairement au côté PZ, du ſommet de l'angle S non cherché, ſuivant ce que preſcrit la Table pour la réſolution des triangles ſphériques obliquangles, & l'on aura d'abord $tang\ PR = \frac{cof\ ZPS \times tang\ PS}{R}$, ce qui donnera PR que nous avons nommé premier ſegment.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

$9{,}949332 = log.\ cof.\ 27°\ 8'\ 30''$
$0{,}475480 = log.\ tang.\ 71°\ 30'\ 0''$
$10{,}424812 = log.\ tang.\ 69°\ 23'\ 37'' = PR,$

donc le ſecond ſegment RZ ſera de 28° 14′ 37″, ce qui donnera par la formule de la Table générale des triangles obliquangles $Tang\ PZS = \frac{tang\ 27°\ 8'\ 30'' \times ſin\ 69°\ 23'\ 37''}{ſin\ 28°\ 14'\ 37''}$; achevant l'opération comme on le voit ici :

$9{,}709815 = log.\ tang. \ldots 27°\ 8'\ 30''$
$9{,}971285 = log.\ ſin. \ldots 69°\ 23'\ 37''$
$0{,}324936 = comp.\ ar.\ log.\ ſin.\ 28°\ 14'\ 37''$
$0{,}006036 = log.\ tang. \ldots 45°\ 23'\ 53''.$

SCHOLIE.

318. Ce Problême peut ſervir à trouver la déclinaiſon d'un plan vertical quelconque. On pourroit auſſi l'employer à déterminer les alignements d'une allée d'arbres ou d'une rue bien dreſſée, en obſervant le moment où l'ombre a paſſé par le pied des arbres ou des murs. Si l'on connoît de plus la hauteur du ſoleil ſur l'horizon au moment de l'obſervation, le calcul deviendra encore plus ſimple, & ſe réduira à cette analogie : *Le coſinus de la hauteur du ſoleil eſt au ſinus de l'angle horaire, comme le coſinus de la déclinaiſon de l'aſtre eſt au ſinus de l'angle du vertical avec le méridien.*

PROBLEME XII.

319. *Connoiſſant l'heure qu'il eſt, la déclinaiſon & la hauteur du ſoleil ; trouver la latitude du lieu* (fig. 35).

SOLUTION.

Par les données du Problême, on voit que l'on connoît le côté PS complément de la déclinaiſon avec l'angle P, & le côté ZS complément de la hauteur du leil ; & c'eſt le côté ZP qu'il faut trouver. Suppoſant donc, comme aux Problêmes précédents, la déclinaiſon du ſoleil de 18° 30′, & qu'il eſt 10 heures 11 minutes 26 ſecondes, ce qui donne l'angle P de 27° 8′ 30″, & que la hauteur du ſoleil eſt de 52° 35′ 0″, d'où l'on conclura l'arc ZS de 37° 25′ ; pour avoir le côté PZ, on abaiſſera de l'angle S la perpendiculaire SR, & l'on déterminera d'abord PR ſuivant la table générale des triangles obliquangles par la formule *tang* premier ſegment = *coſ* angle donné, × *tang* côté adjacent, & enſuite on fera $coſ RZ = \frac{coſ\ I.\ ſegment \times ſin\ 52° 35'}{ſin\ 18° 30}$, d'où l'on déduira ſur le champ la valeur du côté PZ égal au complément de la latitude.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

1°. 9,949332 = *log. cos.* 27° 8′ 30″
0,475480 = *log. tang.* 71° 30′ 0″
0,424812 = *log. tang.* 69° 23′ 37″

2°. 9,546475 = *log. cos.* . . . 69° 23′ 37″
9,899951 = *log. sin.* . . . 52° 35′ 0″
0,498524 = *comp. ar. log. sin.* 18° 30′ 0″
9,944950 = *log. cos.* RZ = 28° 14′ 37″

ôtant donc ce second segment du premier que nous venons de trouver de 69° 23′ 37″, on aura pour le complément de la latitude 41° 9′ 0″, & partant 48° 51′ 0″ pour la latitude.

PROBLEME XIII.

320. *Connoissant la déclinaison du soleil, sa hauteur & son angle azimutal, c'est-à-dire, l'angle que fait avec le méridien, le vertical dans lequel se trouve cet astre au moment de l'observation; trouver la latitude* (fig. 35).

SOLUTION.

Il est visible qu'au triangle PZS, on connoît le côté PS & le côté ZS avec l'angle PZS opposé au côté PS. Donc pour avoir le côté ZP, suivant la Table pour les triangles sphériques obliquangles, on abaissera du sommet de l'angle S un arc SR perpendiculaire au côté inconnu, & l'on aura 1°. $tang\,RZ = \frac{cos\,PZS \times tang\,ZS}{R}$, 2°. $cos\,PR = \frac{cos\,RZ \times cos\,PS}{cos\,ZS}$.

Si donc on suppose la déclinaison du soleil de 18° 30′, sa hauteur sur l'horizon de 52° 35, & l'angle du vertical PZS de 134° 36′ 7″, on trouvera le côté ZS comme il suit.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

1°. 9,846448 = *log. cos.* 134° 36′ 7″
9,883672 = *log. tang.* 37° 25′ 0″
9,730120 *log. tang.* 28° 14′ 37″ = RZ

2°. 9,944948 = *log. cos.* . . 28° 14′ 37″
9,501476 = *log. sin.* . . 18° 30′
0,100049 = *comp. ar. log. sin.* 52° 35′

9,546473 = *log. cos.* RP = 69° 23′ 38″

ôtant donc 28° 14′ 37″, 7 de 69° 23′ 38″0, on trouvera pour le côté ZS complément de la latitude 41° 9′, & par conſéquent la latitude eſt de 48° 51′.

SCHOLIE.

Il eſt facile de voir que de ces ſix choſes la latitude, la hauteur du ſoleil, ſa déclinaiſon, l'angle horaire, l'angle azimutal & l'angle au ſoleil, trois étant données, comme l'on voudra, les trois autres ſeront néceſſairement connues par les regles de la Trigonométrie ; ainſi l'on ne s'arrêtera pas davantage à détailler les différents cas qui réſultent de ces combinaiſons.

PROBLEME XIV.

321. *La longitude & la latitude d'une étoile étant données ; trouver ſa déclinaiſon* (fig. 36).

SOLUTION.

Suppoſons la longitude de l'étoile de 198° 27′ & ſa latitude boréale de 31° 2′; il eſt viſible que dans le triangle PKS, on connoît le côté PK égal à l'obliquité de l'écliptique de 23° 28′ 30″. Le côté KS égal au complément de la latitude de 58° 58′; & l'angle PKS égal à la longitude de l'étoile moins 90°; & c'eſt le côté PS qu'il faut trouver dont le complément ſera la déclinaiſon demandée. Pour y parvenir, ſuivant ce que preſcrit la Table générale des triangles obliquangles; d'un des angles inconnus S, on abaiſſera un arc SR perpendiculaire au côté PK, & qui tombera au-dehors de l'angle S, à cauſe que l'angle PKS eſt obtus; l'arc KR ſera celui que nous avons nommé premier ſegment, lequel joint avec PK

donnera le ſecond ſegment PR ; & l'on l'on aura . . .

1°. *tang* KR $= \frac{\textit{cof}\ \text{PKS} \times \textit{tang}\ \text{KS}}{\text{R}}$,

& *cof* PS ou *ſin* DS $= \frac{\textit{cof}\ \text{KS} \times \textit{cof}\ \text{PR}}{\textit{cof}\ \text{KR}}$.

Opération par Logarithmes.

1°.	9,500342 = *log. cof.* PKS =	108° 27′ 0″
	0,220654 = *log. tang.* KS =	58° 58′ 0″
	9,720996 = *log. tang.* KR =	27° 44′ 41″
	donc PR =	51° 13′ 11″
2°.	9,712260 = *log. cof.* KS	
	9,796804 = *log. cof.* PR	
	0,054042 = *comp. ar. log. cof.* KR	
	9,563106 = *log. ſin.* 21° 26′ 58″ = DS qui eſt la déclinaiſon demandée.	

Probleme XV.

322. *Suppoſant les mêmes données qu'au Problême précédent ; trouver l'aſcenſion droite de la même étoile, & l'angle du cercle de latitude avec le cercle de délinaiſon qui paſſent par la même étoile* (fig. 36).

Solution.

On voit par l'énoncé du Problême qu'au triangle PKS, on connoît toujours deux côtés & l'angle compris ; & de plus que l'aſcenſion droite de l'étoile ſe détermine par l'angle KPS, en ôtant cet angle de 270°. Pour trouver l'angle à l'étoile en même temps, nous ferons uſage des formules de Neper.

On voit par la troiſieme Table que les formules qui conviennent au cas préſent, ſont les deux analogies ſuivantes.

1°, *Le ſinus de la demi-ſomme des côtés* PK *&* KS *eſt à celui de leur demi-différence, comme la cotangente de la moitié de l'angle compris eſt à la tangente de la demi-différence des angles ſur la baſe.*

2°, *Le coſinus de la demi-ſomme des mêmes côtés eſt au*

cosinus de leur demi-différence, comme la cotangente du demi-angle compris PKS *est à la tangente de la demi-somme des angles sur cette même base.*

Opération par Logarithmes.

23° 28′ 30″	58° 58′ 0″
58° 58′ 0″	23° 28′ 30″
82° 26′ 30″	35° 29′ 30″

41° 13′ 15″ demi-somme. 17° 44′ 45″ demi-différence.

108° 27′ 0″

54° 13′ 30″ demi-angle dont le complément est de 35° 46′ 30″.

9,484008 = *log. sin.* 17° 44′ 45″	9,978827 = *log. cos.* . 17° 44′ 45″
9,857670 = *log. tang.* 35° 46′ 30″	9,857670 = *log. tang.* 35° 46′ 30″
0,181139 = *c. a. l. sin.* 41° 13′ 15″	0,123682 = *c. a. l. cos.* 41° 13′ 15″
9,522817 = *log. sin.* 18° 25′ 36″	9,960179 = *log. sin.* . 42° 22′ 36″

La demi-somme des angles en P & en S est donc 42° 22′ 36″, & la demi-différence des mêmes angles de 18° 25′ 56″; donc l'angle KPS sera de 60° 48′ 32″, ce qui donne pour l'ascension droite de l'étoile 209° 11′ 28″, & l'angle à l'étoile sera de 23° 56′ 40″. *C. Q. F. T.*

Scholie.

323. Les ascensions droites & les déclinaisons des étoiles sont d'un très-grand usage dans l'Astronomie, ainsi que leurs longitudes & leurs latitudes. Les unes & les autres servent à déterminer les positions respectives des astres, & à en dresser les catalogues nécessaires pour comparer les mouvements des Planetes, & des Cometes qu'on apperçoit de temps en temps. On employe néanmoins de préférence les longitudes & les latitudes des étoiles; parce que l'on a cru pendant long temps que ces éléments ne souffroient aucun changement, sur-tout, lorsqu'on a soin de compter les longitudes à commencer d'une étoile fixe; tandis que la précession des équinoxes

change conſidérablement l'aſcenſion droite & la déclinaiſon. Au reſte, il eſt aiſé de voir que les éléments de la Théorie des étoiles peuvent ſe déduire les uns des autres, ſuivant un très-grand nombre de combinaiſons qu'il n'eſt pas de mon objet de détailler ici. Les aſcenſions droites & les déclinaiſons des étoiles peuvent ſervir, comme celles du ſoleil, à déterminer les latitudes terreſtres; on peut en déduire les amplitudes orientales ou occidentales de ces aſtres ou de ceux qui auroient les mêmes poſitions dans la ſphere. Elles font connoître celles qui ſont de perpétuelle apparition ſur l'horizon pour un latitude donnée. On connoît encore par leur moyen de combien de temps une étoile ſuit ou précede le paſſage du ſoleil au méridien; ce qui fait connoître leurs levers ou leurs couchers héliaques, c'eſt-à-dire, les ſaiſons de l'année où elles doivent commencer ou ceſſer de paroître à cauſe de l'éclat du ſoleil. Les moyens les plus ſimples que l'on employe pour déterminer les poſitions des étoiles, ſe réduiſent à obſerver leurs hauteurs méridiennes & l'inſtant de leur paſſage au méridien, d'où l'on déduit tout de ſuite leur aſcenſion droite & leurs déclinaiſon, avec leſquelles on conclut aiſément leurs longitudes & latitudes par l'inverſe des Problêmes qu'on vient de réſoudre.

PROBLEME XVI.

324. *Connoiſſant le lieu du ſoleil dans l'écliptique; l'heure qu'il eſt avec la latitude de l'obſervateur; la hauteur d'un aſtre, & l'angle que fait ſon vertical avec le méridien; trouver la déclinaiſon de cet aſtre & ſon aſcenſion droite* (fig. 35).

SOLUTION.

Suppoſons que le lieu du ſoleil ſoit 18° 24′ du taureau, qu'il eſt 9 heures 20 minutes du ſoir; que la hauteur de l'aſtre dans ſon vertical eſt de 43° 15′ ſur l'horizon; l'angle de ſon vertical avec le méridien dans

la partie orientale ſud eſt de 47° 24′, & la latitude du lieu de 48° 51′; il s'agit de trouver l'arc DS qui exprime la déclinaiſon de l'aſtre & la diſtance du point D au premier point d'Ariès. Il eſt viſible qu'au triangle PZS, on connoît les deux côtés PZ & ZS avec l'angle qu'ils comprennent. On cherchera d'abord la déclinaiſon par le côté PS, en abaiſſant un arc perpendiculaire SR du ſommet de l'angle S ſur le côté PZ, & l'on aura les formules ſuivantes par la Table des triangles obliquangles, pour trouver le côté PS.

1°. *Tang* RZ = *cof* PZS × *tang* ZS.

2°. *Cof* PS ou *ſin* DS = $\frac{\textit{cof}\ \text{ZS} \times \textit{cof}\ \text{PR}}{\textit{cof}\ \text{RZ}}$.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

9,830509 = *log. cof.* PZS	9,835807 = *log. cof.* ZS
0,026546 = *log. tang.* ZS	9,593900 = *log. cof.* PR
9,857055 = *l. tang.* RZ = 35° 44′ 11″	0,090598 = *comp. ar. log. cof.* RZ
	9.520305 = *l. ſin.* 19° 21′ 5″ = DS,

ainſi la déclinaiſon de l'aſtre eſt de 19° 21′ 5″.

Préſentement, pour avoir l'aſcenſion droite, on commencera par chercher l'angle horaire ZPS par l'analogie ordinaire entre les ſinus des côtés & ceux des angles oppoſés, ce qui donnera *ſin* ZPS = $\frac{\textit{ſin}\ \text{PZS} \times \textit{ſin}\ \text{ZS}}{\textit{ſin}\ \text{PS}}$.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

9,866935 = *log. ſin.* PZS = . . . 132° 36′
9,862353 = *log. ſin.* ZS = . . . 46° 45′ 0″
0,025257 = *comp. ar. log. ſin.* PS = 70° 38′ 55″
9,754545 = *log. ſin.* ZPS = . . . 34° 37′ 43″

D'ailleurs en réduiſant l'heure donnée 9 heures 20 minutes parties de l'équateur, on trouve que le ſoleil eſt éloigné du méridien de 140° 0′ 0″; enfin, parce que l'aſcenſion droite du ſoleil, lorſqu'il eſt dans 18° 24′ du taureau, eſt de 45° 55″ 58″ (n°. 302). Si l'on ajoute

enſemble ces trois arcs, on aura l'aſcenſion droite de l'aſtre de 220° 33′ 41″.

Si l'on veut ſavoir l'heure du paſſage de l'étoile par le méridien, il n'y a qu'à réduire l'arc 34° 37′ 43″ en parties de temps, & l'on trouvera qu'il répond à 2 heures 18 minutes 31 ſecondes; ajoutant cette heure à $9^h\ 20^m$, on trouvera que l'aſtre a dû paſſer au méridien à $11^h\ 38^m\ 31''$ du ſoir.

PROBLEME XVII.

325. *Connoiſſant les aſcenſions droites & déclinaiſons de deux étoiles fixes obſervées dans un même vertical ou azimuth auſſi donné de poſition avec leur diſtance, ou l'arc de grand cercle compris entre ces étoiles; trouver la latitude de l'obſervateur* (fig. 37).

Par les données du Problême, il eſt viſible que les trois côtés du triangle PS*s* ſont donnés, ainſi que l'angle en P; puiſque les arcs PS, P*s* ſont les compléments de la déclinaiſon de chaque étoile, connue par l'hypoteſe. La diſtance S*s* eſt auſſi donnée, & enfin l'angle SP*s* eſt meſuré par la différence d'aſcenſion droite, donc on aura $\textit{fin}\ Ss : \textit{fin}\ SPs :: \textit{fin}\ sP : \textit{fin}\ PSZ = \frac{\textit{fin}\ sP \times \textit{fin}\ SPs}{\textit{fin}\ Ss}$.

De plus au triangle PZS, on connoît actuellement deux angles & l'un des côtés oppoſés à ces angles: ſavoir, l'angle de l'azimut PZS, & l'angle PSZ avec le côté PS; donc on aura $\textit{fin}\ PZS : \textit{fin}\ PSZ :: \textit{fin}\ PS : \textit{fin}\ PZ$, ou en mettant pour ſinus de PSZ ſa valeur, & ôtant la fraction $\textit{fin}\ PZS \times \textit{fin}\ Ss : \textit{fin}\ sP \times \textit{fin}\ SPs :: \textit{fin}\ PS : \textit{fin}\ PZ$.

Suppoſons, pour appliquer cette ſolution à un exemple particulier, que la diſtance S*s* eſt de 28° 30′; l'aſcenſion droite de S de 78° 24′, & ſa déclinaiſon 27° 25′; que l'aſcenſion droite de *s* eſt de 104° 52′, & ſa déclinaiſon 12° 18′; enfin que l'angle azimutal AZK eſt de 73° 36′: l'angle SP*s* ſera de 26° 28′; l'arc PS ſera

de 62° 35′, & l'arc Ps de 77° 42′. Cela posé, il sera facile de trouver la valeur de PZ.

OPÉRATION PAR LOGARITHMES.

9,948257	*log. sin.*	62° 35′ 0″	= PS
9,989915	*log. sin.*	77° 42′ 0″	= sP
9,649020	*log. sin.*	26° 28′ 0″	= SPs
0,018039	*comp. ar. log. sin.*	73° 36′ 0″	= PZS
0,321337	*comp. ar. log. sin.*	28° 30′ 0″	= Ss
9,926568	*log. sin.*	57° 36′ 42″	complément de la latitude.

326. COROLLAIRE I. Il est visible que l'on peut actuellement trouver l'angle horaire ZPS ; & partant si l'on connoît le lieu du soleil & son ascension droite, sa différence d'avec celle de l'étoile sera connue. Otant encore de cette différence l'arc AD, restera l'arc de l'équateur compris entre le méridien du lieu, & celui qui passe par le soleil, d'où l'on déduira le moment de l'observation : il n'est pas moins évident que l'on peut aussi connoître, en poursuivant ce calcul, la hauteur de chaque étoile à l'instant où elles ont été observées.

327. COROLLAIRE II. Si au lieu de donner l'azimut des étoiles, on avoit la hauteur de l'une d'elles : il est visible que par un calcul à peu près semblable, on trouveroit la hauteur du pole, car on connoît toujours les trois côtés du triangle PSs avec l'angle P ; ainsi l'on auroit l'angle PSZ qui se trouve compris entre les deux côtés connus du triangle PZS.

328. COROLLAIRE III. Si l'on connoît, outre les déclinaisons & ascensions droites des étoiles observées dans un même vertical, l'angle horaire ZPS, on aura encore la latitude du lieu ; puisque dans le triangle PSZ, on connoîtra alors deux angles sur le côté PS, aussi connu par la supposition.

329. COROLLAIRE IV. De même encore, si l'on a la distance des étoiles & leurs déclinaisons avec la hau-

teur de l'une des deux, on trouvera tout le reſte comme dans le Problême actuel. On voit par-là, combien il eſt utile d'avoir de bonnes Tables des étoiles avec leurs déclinaiſons & aſcenſions droites, diſtances, longitudes & latitudes, puiſqu'elles peuvent ſervir à donner les latitudes avec une très-grande facilité, ſans même que l'on ait beſoin de grands inſtruments, un fil à plomb étant ſuffiſant pour obſerver ſi deux étoiles ſont dans un même vertical.

PROBLEME XVIII.

326. *Connoiſſant les latitudes & longitudes de deux points placés ſur le Globe terreſtre ; trouver leur diſtance itinéraire, ou, ce qui revient au même, l'arc de cercle compris entre ces deux lieux* (fig. 37).

Suppoſons préſentement que les points S, *s* déſignent les lieux propoſés : il eſt viſible que dans le triangle SP*s*, on connoit, ſuivant l'énoncé du problême, les deux côtés SP, *s* P compléments des latitudes avec l'angle P différence des longitudes ; donc on aura le côté S*s* par le troiſieme cas de la table des triangles obliquangles. Après quoi l'on n'aura plus qu'à réduire le nombre de degrés, minutes & ſecondes en lieues, à raiſon de 25 au degré.

PROBLEME XIX.

327. *Connoiſſant les latitudes de deux Villes & leurs diſtances ; trouver leur différence en longitude.*

On commenceta par réduire la diſtance donnée en degrés, minutes & ſecondes d'un grand cercle ; au moyen de quoi l'on aura un triangle ſpérique SP*s*, duquel on connoît les trois côtés ; ainſi l'on trouvera aiſément l'angle P qui eſt meſuré par la différence des longitudes. *C. Q. F. T.*

Donc ſi la poſition d'une de ces deux Villes eſt déterminée ; l'autre le ſera auſſi, d'autant plus exactement que la diſtance donnée ſera meſurée ou donnée avec plus de

précision. Réciproquement, si l'on connoît la différence des longitudes la distance & la latitude d'un point du Globe, on aura aussi la latitude de l'autre point; mais rarement on se sert de ce cette méthode, parce qu'il y a une infinité de meilleurs manieres de trouver la latitude, comme on a pu s'en convaincre aisément par ce qui précede.

Ces Problêmes renfermant à peu près tous les cas des triangles sphériques rectangles ou obliquangles, suffisent pour indiquer comment il faut s'y prendre, pour trouver les solutions numériques des différents problêmes de Trigonométrie, par le moyen des regles démontrées dans les Chapitres précédents. Je ne me suis proposé autre chose ici que de donner quelques exemples en nombres; c'est pourquoi je n'ai point fait entrer dans ces problêmes les différentes modifications dont les données peuvent être susceptibles par la parallaxe, la réfraction, l'abberration de la lumiere, ou la nutation de l'axe de la terre. Ces Théories ne peuvent entrer que dans un Traité complet d'Astronomie. Il me suffit d'avoir donné dans cet Ouvrage les moyens de résoudre toutes les difficultés relatives à la Trigonométrie, & que l'on peut rencontrer dans l'étude de cette science, qui devient d'autant plus épineuse que l'on veut apprécier tous les phénomenes avec plus de rigueur & d'exactitude.

FIN.

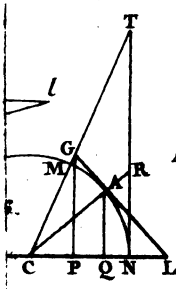


Fig. 5.

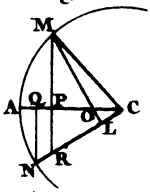
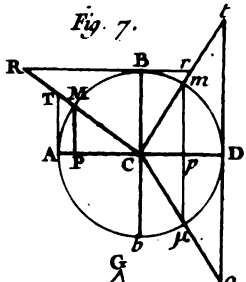


Fig. 7.



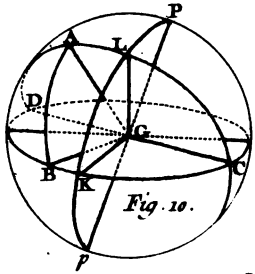


Fig. 10.

Fig. 14

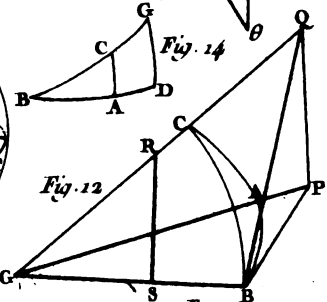
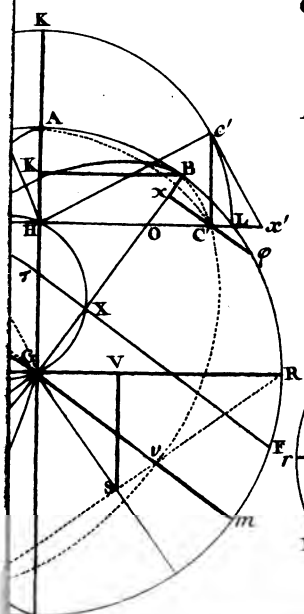


Fig. 12.



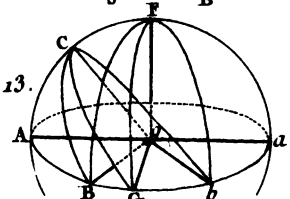


Fig. 13.

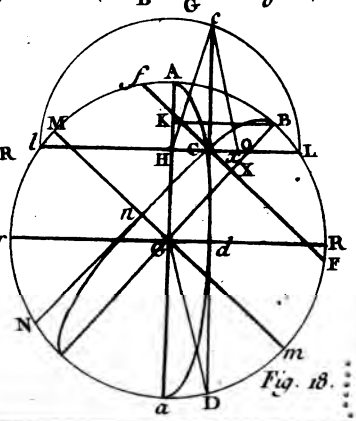


Fig. 18.

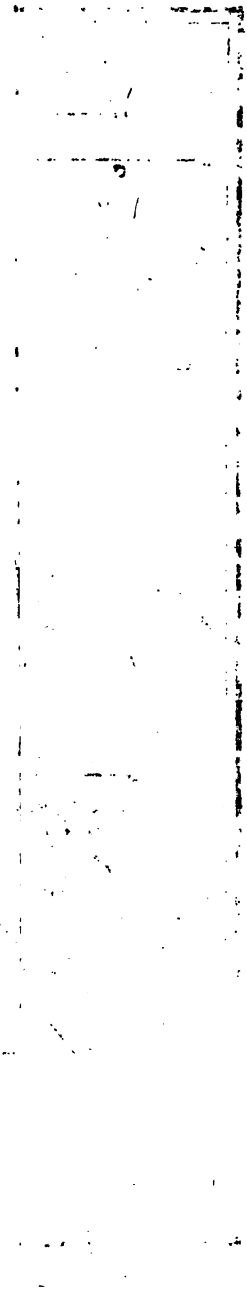


Fig. 21.

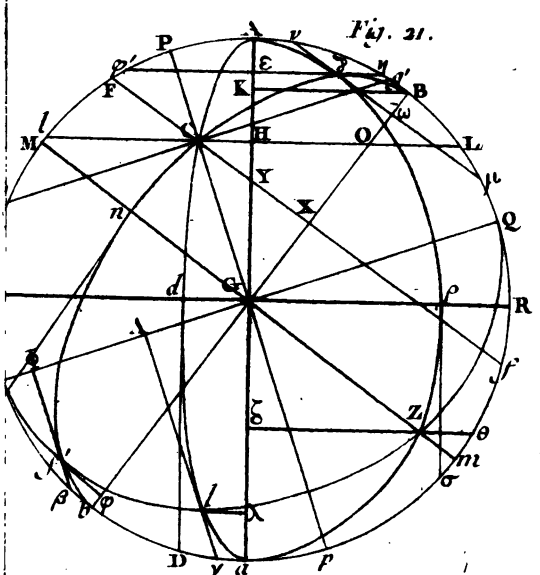
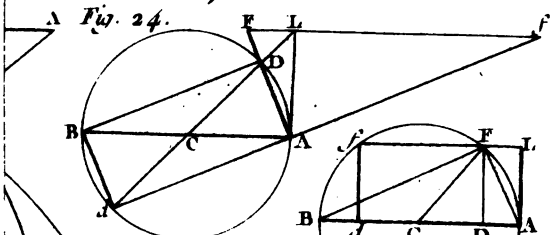


Fig. 24.



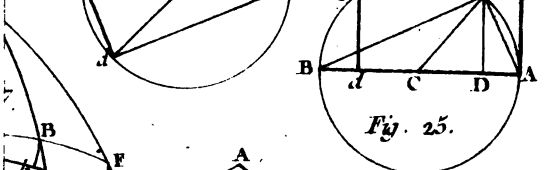
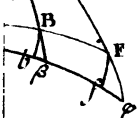


Fig. 25.



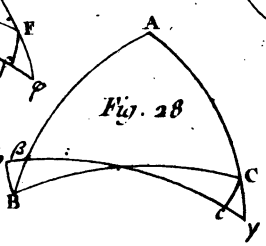


Fig. 28

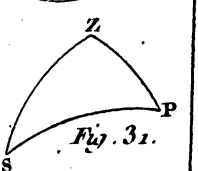


Fig. 31.

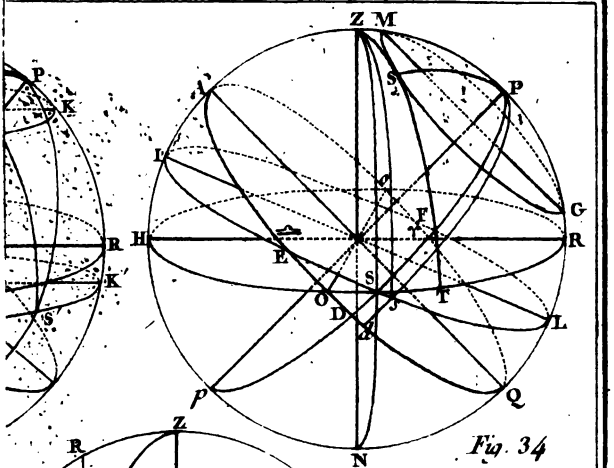


Fig. 34

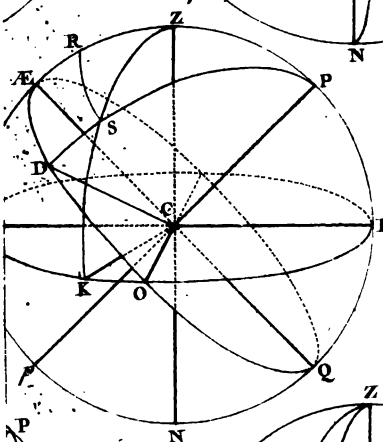


Fig. 35.

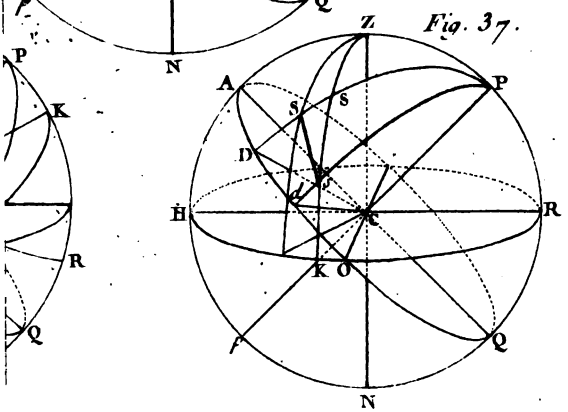


Fig. 37.

TABLE
DES MATIERES.

CHAPITRE I. *Notions prélimiaires ſur les différentes lignes le plus en uſage dans les calculs de trigonométrie*, Page 1 & ſuiv.

Problême I. *Trouver les ſinus de la ſomme ou de la différence de deux arcs*, 9

Problême II. *Trouver les coſinus de la ſomme ou de la différence de deux arcs*, 10

Application de ces deux Problêmes à l'arc cherché des ſinus & coſinus des arcs multiples, 13 & ſuiv.

Formules générales pour les ſinus & coſinus d'arcs multiples, en commençant par les plus hautes puiſſances ou les moindres puiſſances des ſinus & coſinus de l'arc ſimple, tant pour les nombres pairs que pour les impairs, 15 & ſuiv.

Problême III. *Exprimer les puiſſances des ſinus & coſinus d'un arc quelconque par les ſinus ou coſinus de ce même arc, & de ſes multiples*, 18

Différentes formules générales aux différentes puiſſances des ſinus ou coſinus de l'arc ſimple, 20 & 21

Problême IV. *Transformer un ſinus ou coſinus du Multiple d'un arc quelconque, en puiſſances des ſinus & coſinus de l'arc ſimple*, 22

Formules générales relatives à ce problême, 22 & ſuiv.

De l'uſage des facteurs imaginaires dans la Théorie des ſinus & coſinus, 24

Problême V. *Trouver les facteurs de la ſomme de deux quarrés* aa & bb, *ou, ce qui revient au même, découvrir ſi l'on peut former* aa + bb *par multiplication*, 25

Scholie ſur la vraie Théorie des imaginaires, 26

Nouvelles ſuites ſur les ſinus & coſinus des arcs multiples, qui ſe déduiſent de cette Théorie, 27

Autres ſuites déduites des mêmes principes pour exprimer le ſinus & coſinus d'un arc en fonctions de cet arc, 28

Problême VI. *Trouver la tangente de la ſomme ou de la différence de deux arcs*, 29

Différentes formules ſur les tangentes & cotangentes des arcs multiples, 31 & ſuiv.

Remarques ſur toutes les formules précédentes pour la diviſion

des arcs de cercle. On y fait voir que le Problême de la trisection est toujours du troisieme degré, quelque soit la formule qu'on emploie pour le résoudre, 35

Diverses propriétés remarquables des sinus & cosinus. Usages des formules précédentes dans les Logarithmes, 36 & suiv.

Définition & usage du complément arithmétique, 42

TABLE *générale de toutes les formules démontrées dans le premier Chapitre,* 43 & suiv.

CHAPITRE II. *Qui traite des propriétés générales des triangles sphériques rectangles ou non rectangles, & de leur résolution par analogie,* 46

PREMIERE SECTION. Des triangles sphériques en général, *ibid. & suiv.*

SECONDE SECTION. De la Résolution des triangles sphériques rectangles, 53 *& suiv.*

Démonstration du Théorême général de Néper, *sur les triangles sphériques rectangles,* 57

De la valeur des angles d'un triangle rectangle, eu égard aux côtés qui comprennent l'angle droit, 58

TROISIEME SECTION. De la résolution des triangles sphériques obliquangles, 63

Démonstration d'un Théorême général sur les triangles sphériques obliquangles, analogue à celui de Néper *sur les triangles rectangles,* 63 & 64

Résolution d'un triangle sphérique obliquangle, dont on connoît les trois côtés ou les trois angles. Examen de toutes les formules qu'on pouvoit employer, pour trouver un angle ou un côté, 65 & suiv.

QUATRIEME SECTION. Démonstration des fameuses Analogies de *Néper*, desquelles on déduit les analogies de la Trigonométrie rectiligne : on déduit aussi de ces formules d'autres analogies remarquables, 76 *& suiv.*

CHAPITRE III. *De la Résolution Graphique ou Géométrique des Triangles sphérique quelconques,* 87

Observation sur la nature de ces Solutions, ibid. & suiv.

Problême I. *Connoissans dans un triangle quelconque deux côtés & l'angle compris; trouver 1°, un des angles sur la base ou le troisieme côté : 2°, ce troisieme côté,* 88 & 89

Divers Scholies dans lesquels on expose d'autres manieres de résoudre le même problême, 90 & 91

Problême II. *Connoissant deux angles avec le côté adjacent dans un triangle sphérique quelconque; trouver* 1°, *les deux autres côtés:* 2°, *le troisieme angle*, 91

Problême III. *Connoissant deux côtés quelconques d'un triangle sphérique, & l'un des angles opposés à ces côtés; trouver* 1°, *le troisieme côté:* 2°, *les deux autres angles*, 92

Autre solution du même Problême, 93

Problême IV. *Connoissant deux angles quelconques avec un côté opposé à l'un de ces angles; trouver* 1°, *le côté opposé à l'autre angle:* 2°, *le troisieme côté:* 3°, *le troisieme angle*, 94

Problême V. *Connoissant les trois côtés d'un triangle sphérique quelconque, trouver un angle quelconque du même triangle*, 95 & 96

Problême VI. *Connoissant les trois angles d'un triangle, trouver un quelconque de ses côtés*, 96

Problême VII. *Connoissant l'ellipse qui est la projection ortographique d'un grand cercle; trouver sur le plan de projection l'apparence des Poles de ce même grand cercle. Et réciproquement; ayant la projection des Poles d'un grand cercle, trouver l'ellipse qui est la projection de ce grand cercle*, 97

Problême VIII. *Trouver les dimensions de l'ellipse qui est la projection ortographique d'un petit cercle de la sphere*, ibid.

Application des derniers problêmes aux projections dont on fait usage dans la Théorie des éclipses, 98 & suiv.

Problême IX. *Trouver* 1°, *la projection de l'arc abaissé perpendiculairement d'un angle sur le côté opposé.* 2°, *La grandeur des segments de la base.* 3°, *Les segments de l'angle divisé.* 4°, *La valeur de l'arc perpendiculaire*, 204

Problême. *Résolution géométrique d'un triangle sphérique quelconque dont on connoit les trois côtés, par le développement des mêmes côtés*, 102 & suiv.

CHAPITRE IV. *De la Résolution analytique ou algébrique des triangles sphériques quelconques*, 110

Problême I. *Trouver les rapports entre les sinus des angles & ceux des côtés opposés*, 111

Problême II. *Connoissant deux côtés & l'angle compris; trouver* 1°, *un angle quelconque.* 2°, *Le troisieme côté*, 112

Problême III. *Supposant les mêmes données, trouver le troisieme côté indépendamment des angles adjacents*, 114

Problême IV. *Connoissant deux angles sur un côté; trouver* 1°, *un côté quelconque.* 2°, *Le troisieme angle*, 116

Problême V. *Avec les mêmes données, trouver immédiatement le troiſieme angle*, 117

Problême VI. *Connoiſſant deux côtés & l'un des angles oppoſés à ces côtés; trouver* 1°, *l'angle compris entre les deux côtés.* 2°, *Le côté adjacent à l'angle donné*, 119

Problême VII. *Connoiſſant deux angles & l'un des côtés oppoſés; trouver* 1°, *le côté adjacent.* 2°, *Le troiſieme angle.* 3°, *Le troiſieme côté*, 121

Problême VIII. *Connoiſſant les trois côtés d'un triangle quelconque; trouver un angle quelconque du même triangle*, 122

Problême IX. *Connoiſſant les trois angles d'un triangle, trouver un côté quelconque*, 123

Obſervation ſur les problêmes VI *&* VII, *où l'on compare les ſolutions analytiques & ſynthétiques pour les ramener à la même expreſſion*, 124

Scholie pour déduire des formules précédentes toutes celles des triangles rectangles, 125

Problême X. *Suppoſant un arc abaiſſé perpendiculairement d'un angle ſur le côté oppoſé; trouver en ſinus, coſ. tang. & cotang.* 1°, *Les rapports des ſegments de la baſe aux angles adjacents à cette baſe.* 2°. *Les rapports des mêmes ſegments avec les côtés correſpondants.* 3°, *Les rapports des ſegments de l'angle vertical aux côtés de l'angle adjacent.* 4°, *Les rapports des ſegments du même angle aux angles ſur la baſe*, 127

Conſtruction de quelques-unes des formules découvertes aux problêmes précédents par les Logarithmes. Application à divers exemples, 131

Problême XI. *Conſtruire par les Tables des ſinus l'équation* $x^2 \pm 2ax = bb$, 133 & ſuiv.

Problême XII. *Conſtruire par les Tables des ſinus les racines de l'équation* $x^2 \pm 2ax + bb = 0$, 134

Conſtruction des équations du troiſieme degré par les Tables des ſinus, 136

Problême I. *Trouver les racines de l'équation* $x^3 - px \pm q = 0$ *lorſque* $\frac{2}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$, 136

Problême II. *Trouver les racines de l'équation* $x^3 - px \pm q = 0$ *lorſque* $\frac{2}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$, 137

Problême III. *Trouver les racines de l'équation* $x^3 + px \pm q = 0$, 138

Application des dernieres ſolutions à différents exemples, 139 *&* ſ.

CHAPITRE V. *Des analogies différentielles des triangles ſphériques & rectilignes quelconques*, 114

PREMIERE SECTION. Où l'on démontre les propoſitions néceſſaires à cette Théorie, 142 *ibid. & ſuiv.*

SECONDE SECTION. Des variations d'un triangle ſphérique ou rectiligne, dans lequel on ſuppoſe un angle conſtant, ainſi que le côté qui lui eſt adjacent, 145 & *ſ.*

TROISIEME SECTION. Des variations d'un triangle ſphérique ou rectiligne quelconque, en ſuppoſant un angle conſtant avec le côté qui lui eſt oppoſé, 149 *& ſuiv.*

QUATRIEME SECTION. Des variations d'un triangle ſphérique ou rectiligne, lorſque deux côtés demeurent conſtants, 152 *& ſuiv.*

CINQUIEME SECTION. Des variations d'un triangle ſphérique dans lequel on ſuppoſe deux angles conſtants, 157 *& ſuiv.*

Application de cette Théorie à différents exemples,

Premier Exemple. *Déterminer l'erreur qu'on peut commettre ſur une hauteur par l'erreur connue dans l'angle obſervé,* 159

Second Exemple. *Trouver l'heure du jour ou de la nuit par la hauteur obſervée d'une étoile, ou d'un aſtre quelconque; & déterminer l'erreur du temps d'après celle connue dans la hauteur obſervée,* 160

Troiſieme Exemple. *Où l'on fait l'application des principes précédents au problême du plus court crépuſcule, après avoir réſolu le problême pour deux almikantarats quelconques différents de l'horizon & du cercle crépuſculaire,* 162 & ſuiv.

Quatrieme Exemple. *Trouver en tout temps la correction qu'il faut faire au midi conclu par les hauteurs correſpondantes, lorſque l'aſtre obſervé ſubit une variation en déclinaiſon pendant l'intervalle des obſervations,* 166 & ſuiv.

Problême. *Trouver l'aire d'un triangle ſphérique quelconque,* 168

CHAPITRE VI. *Application des regles démontrées aux Chapitres précédents à différents problêmes d'Aſtronomie ſphérique,* 170

Problême I. *Connoiſſant le lieu du ſoleil dans l'écliptique; trouver ſa déclinaiſon ou ſa diſtance à l'équateur,* ibid.

Problême II. *Connoiſſant la déclinaiſon du ſoleil, & de plus dans quelle ſaiſon de l'année on ſe trouve, déterminer le lieu de cet aſtre dans l'écliptique,* 171

Problême III. *Connoiſſant le lieu du ſoleil dans l'écliptique ; trouver ſon aſcenſion droite*, 172
Problême IV. *Connoiſſant la latitude d'un lieu & la déclinaiſon du ſoleil ; trouver ſon amplitude orientale ou occidentale*, ibid.
Problême V. *Connoiſſant la latitude d'un lieu, & le degré du ſoleil dans l'écliptique ; trouver le point de l'équateur qui arrive à l'horizon en même temps que le ſoleil, ou, ce qui revient au même, l'aſcenſion oblique qui convient à cette latitude & au lieu du ſoleil*, 173
Problême VI. *Connoiſſant la latitude & le lieu du ſoleil dans l'écliptique ; trouver l'angle de l'écliptique avec l'horizon à l'inſtant du lever de cet aſtre*, 174
Problême VII. *Connoiſſant la déclinaiſon d'un aſtre & la latitude de l'obſervateur ; trouver* 1°, *le moment auquel il paroît monter perpendiculairement à l'horizon.* 2°, *La hauteur de l'aſtre dans le vertical où ce phenomene a lieu.* 3°, *L'angle de ce vertical avec le méridien*, 175
Problême VIII. *Connoiſſant la latitude & la déclinaiſon du ſoleil ; trouver l'heure de ſon lever & de ſon coucher*, 177
Problême IX. *Connoiſſant la latitude, la déclinaiſon & la hauteur du ſoleil ſur l'horizon ; trouver l'heure qu'il eſt*, 178
Problême X. *Connoiſſant la latitude, la déclinaiſon du ſoleil & ſa hauteur ſur l'horizon ; trouver l'angle du vertical du ſoleil avec le méridien*, 180
Problême XI. *Connoiſſant la latitude, la déclinaiſon & l'heure à laquelle le ſoleil s'eſt trouvé dans un vertical, dont on ignore la poſition ; trouver l'angle que fait ce même vertical avec le méridien*, 181
Problême XII. *Connoiſſant l'heure qu'il eſt, la déclinaiſon & la hauteur du ſoleil ; trouver la latitude du lieu*, 182
Problême XIII. *Connoiſſant la déclinaiſon du ſoleil, ſa hauteur & ſon angle azimutal, c'eſt-à-dire, l'angle de ſon vertical avec le méridien ; trouver la latitude*, 183
Problême XIV. *La longitude & la latitude d'une étoile étant données ; trouver ſa déclinaiſon*, 184
Problême XV. *Suppoſant les mêmes données ; trouver l'aſcenſion droite de l'étoile, & l'angle du cercle de latitude avec le cercle de déclinaiſon qui paſſent par cette étoile*, 185
Problême XVI. *Connoiſſant le lieu du ſoleil dans l'écliptique, l'heure qu'il eſt avec la latitude de l'obſervateur, la hauteur d'un aſtre & l'angle de ſon vertical avec le méridien ; trouver la déclinaiſon de ce même aſtre & ſon aſcenſion droite*, 187
Problême XVII. *Connoiſſant les aſcenſions droites, les déclinaiſons & les diſtances en degré de deux étoiles fixes obſervées dans un même vertical ; trouver la latitude de l'obſervateur*, 189

Problême XVIII. *Connoiſſant les latitudes & longitudes de deux points placés ſur le globe terreſtre ; trouver la diſtances de ces deux points*, 191

Problême XIX. *Connoiſſant les latitudes de deux Villes & leurs diſtances, trouver leur différence en longiuude*, ibid.

FIN DE LA TABLE DES MATIERES.

Fautes à corriger.

PAGE 45 n°. 96. *tang.* $(\frac{1}{2}A\frac{1}{2}B)$ *liſez ; tang.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

Page 81, *lig.* 1, demi-ſomme des côtés : *liſez ;* demi-ſomme des angles.

Page 94, *lig.* 14, au lieu des points C, c' : *liſez* ; C, C'.

Ibid. 9 *lignes plus bas*, détermineroit : *liſez ;* détermineront.

Page 168, *vers le bas, au lieu de* M', N, O : *liſez ;* M, O, N.

Page 169, *lig.* 9, lorſqu'elle ſurpaſſera : *liſez ;* lorſqu'elle ſera moindre.

DEC 2 1921